مثال (1) :

يقوم مصنع للألبسة بإنتاج ثلاث أصناف من الملبوسات (A, B, C) ويستخدم من أجل ذلك المواد الأولية (M_1, M_2, M_3) ترغب إدارة المصنع بتحديد كمية الإنتاج من هذه الأصناف من أجل تحقيق أعظم ربح ممكن علماً أن الربح يتناسب طرداً مع عدد الوحدات المنتجة، والمعلومات التي تم الحصول عليها مرتبة في الجدول الآتي :

الكميات المتوفرة	نوع المنتج			المواد الأولية
	C	B	A	
2000	2,4	1	1,5	M_1
8000	1	5	1	M_2
5000	3,5	3	1,5	M_3
	4,18	7,3	5,24	ربح واحدة المنتج

الأرقام في الجدول تمثل ما يحتاجه إنتاج الوحدة الواحدة من كل صنف من المواد الأولية

المطلوب : كتابة البرنامج الخطي للمشكلة المطروحة

الحل :

نفترض أن :
X_1 الكمية المنتجة من الصنف A
X_2 // // // // B
X_3 // // // // C
متغيرات القرار

سيكون تابع الهدف الذي يمثل الربح من الأصناف الثلاثة هو

$$Max\ Z = 5{,}24X_1 + 7{,}3X_2 + 4{,}18X_3$$

والمطلوب هو تعظيم الربح أي تعظيم التابع Z علماً أن الكميات المتوفرة من المواد الأولية محدودة كما يظهر في الجدول وبالتالي هذه المحدودية تمثل قيود على متغيرات القرار وهي :

$\boxed{1}$ القيد الخاص بالمادة الأولية M_1

$$1,5 X_1 + 1 X_2 + 2,4 X_3 \leq 2000$$

$\boxed{2}$ القيد الخاص بالمادة الأولية M_2

$$1 X_1 + 5 X_2 + 1 X_3 \leq 2000$$

$\boxed{3}$ القيد الخاص بالمادة الأولية M_3

$$1,5 X_1 + 3 X_2 + 3,5 X_3 \leq 5000$$

$\boxed{4}$ القيد الأخير ويسمى بقيد عدم السلبية الذي يعني أنه لا يمكن الانتاج بكميات سالبة .

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

مثال (2)

شركة للدواجن ترغب بشراء مزيج من ثلاث أنواع من العلف A,B,C بحيث تؤمن المزيج الاحتياجات الاسبوعية الضرورية للدواجن من المواد الغذائية الأساسية الأربعة والتي تدخل في تركيب العلف كما في الجدول الآتي

المواد الغذائية الداخلة في تركيب العلف	نوع العلف		
	A	B	C
I	1	4	2
II	2	2	1
III	4	1	1
IV	3	2	1

فإذا علمت أن تكلفة الوحدة الواحدة من العلف هي 15 ، 25 ، 30 على التوالي لنوع العلف A ، B ، C وأن الاحتياجات الأسبوعية من المواد الغذائية للدواجن هي على التوالي 1500 ، 300 ، 800 ، 260 من المواد I ، II ، III ، IV .

المطلوب

كتابة البرنامج الخطي الذي يمثل المشكلة:

الحل:

نفترض أن: X_1 تمثل كمية العلف A

X_2 " " " B

X_3 " " " C

البرنامج الخطي:

تابع الهدف يمثل التكلفة

$$\text{Min} \quad Z = 15X_1 + 25X_2 + 30X_3$$

القيود

للمادة I : $1X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 1500$

" II : $2X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 300$

" III : $3X_1 + 1X_2 + 1X_3 \geq 800$

" IV : $4X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 280$

القيد الأخير هو قيد عدم السلبية $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

مثال (3)

حل بالطريقة البيانية النموذج الخطي الآتي :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

القيود :

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل :

① نحدد أنصاف المستويات التي تمثل حلول متراجحات القيود :

* القيد الأول :

نكتب المتراجحة على شكل مساواة $x_1 + 2x_2 = 8$

نوجد نقطتين لرسم المستقيم :

نفرض $x_1 = 0$ ⇐ $x_2 = 4$

نفرض $x_2 = 0$ ⇐ $x_1 = 8$

كما في الجدول أدناه

x_2	x_1	
4	0	النقطة الأولى
0	8	النقطة الثانية

* القيد الثاني :

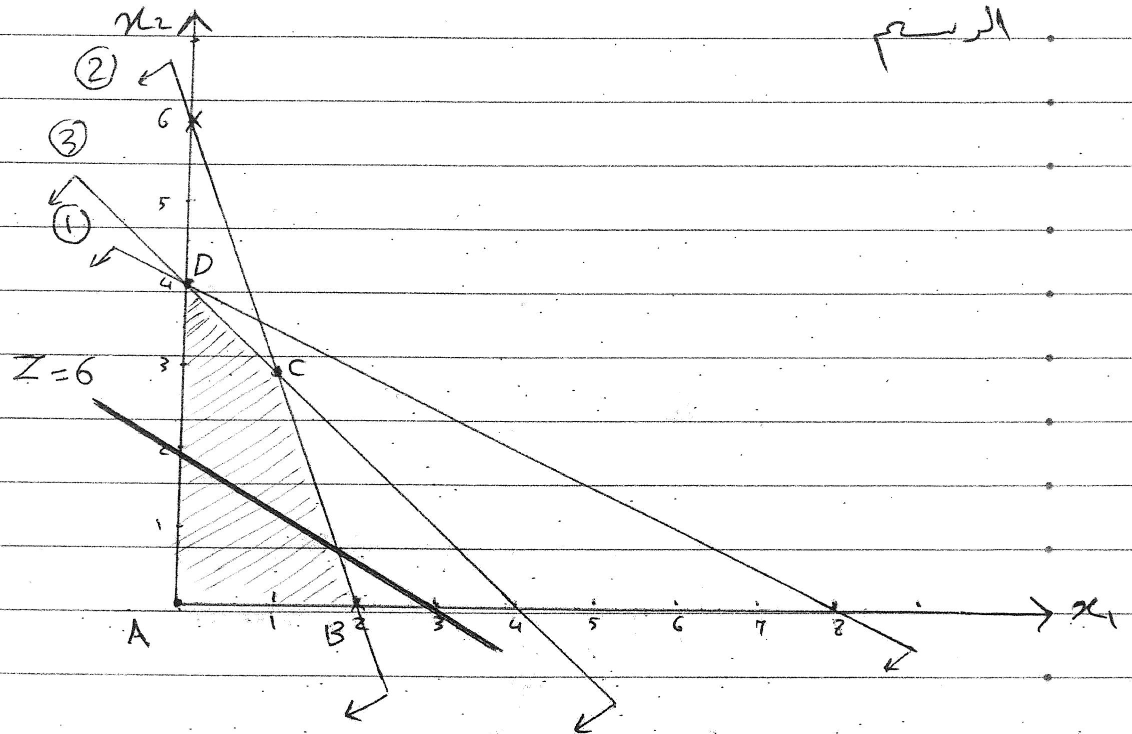
نفس الطريقة السابقة $3x_1 + x_2 = 6$

x_2	x_1	
6	0	النقطة الأولى
0	2	النقطة الثانية

* القيد الثالث: $x_1 + x_2 = 4$

x_2	x_1	
4	0	النقطة الأولى
0	4	النقطة الثانية

الرسم



② منطقة الحلول الممكنة: هي المنطقة المظللة التي تحدها النقاط الركنية A وB وC وD)

معادلة تابع الهدف

③ نرسم المستقيم تابع الهدف: نفرض $Z = 6 \Leftarrow 6 = 2x_1 + 3x_2$

x_2	x_1	
2	0	النقطة الأولى
0	3	النقطة الثانية

④ نحرك مستقيم تابع الهدف بشكل موازٍ ومبتعدين عن نقطة الأصل (0,0) منتبهاً لآخر نقطة ركنية يقاطعها هي D فتكون هي نقطة الحل الأمثل

⑤ احداثيات نقطة الحل الأمثل D هي: $x_1 = 0$ و $x_2 = 4$ ⇐ نعوض في تابع الهدف:

$$Z = 2(0) + 3(4) = 12$$

وهي أعظم قيمة لتابع الهدف Z عندما $x_1 = 0$ و $x_2 = 4$

مثال (4)

أوجد بالطريقة البيانية حل البرنامج الخطي الآتي :

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 3x_2$$

القيود

$$4x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 6$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الحل :

نكتب :

القيد الأول : $4x_1 + x_2 = 8$

x_2	x_1	
8	0	النقطة الأولى
0	2	النقطة الثانية

القيد الثاني : $x_1 + x_2 = 4$

x_2	x_1	
4	0	النقطة الأولى
0	4	النقطة الثانية

القيد الثالث : $x_1 + 4x_2 = 6$

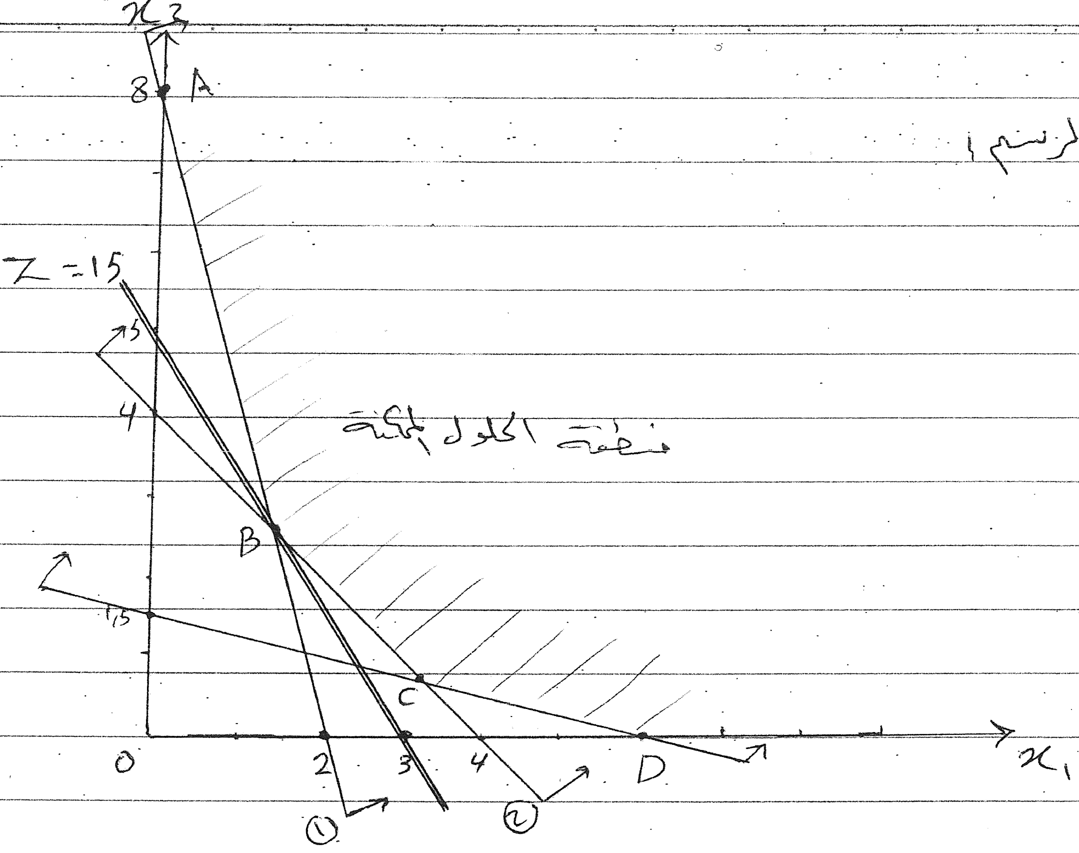
x_2	x_1	
1.5	0	النقطة الأولى
0	6	النقطة الثانية

دالة الهدف : نفرض $Z = 15$

$$15 = 5x_1 + 3x_2$$

x_2	x_1	
5	0	النقطة الأولى
0	3	النقطة الثانية

الرسم :



إذا حركنا مستقيم دالة الهدف بشكل متوازي باتجاه نقطة الأصل نجد أن آخر نقطة ركنية يتقاطع معها هي النقطة B فهي إذاً نقطة الحل الأمثل

إحداثيات النقطة B :

إن النقطة B تنتج من تقاطع القيدين ① و ②

بالحل المشترك للمعادلتين :
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$
بطريقة كرامر

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\overset{(3\times1)}{8} - \overset{(4\times1)}{4}}{\underset{(4\times1)}{4} - \underset{(1\times1)}{1}} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16-8}{4-1} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$\Rightarrow$ نعوض قيم x_1 و x_2 في دالة الهدف

$$Z = 5\left(\frac{4}{3}\right) + 3\left(\frac{8}{3}\right)$$
$$= 14,6$$

وهي أصغر قيمة لدالة الهدف

مثال (5)

أوجد بالطريقة البيانية حل البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 7x_2$$

القيود:

$$x_1 + 4x_2 \geq 80$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 120$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 300$$
$$-x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الحل: نوجد منطقة الحلول الممكنة للقيود:

	x_1	x_2
نقطة 1	0	20
نقطة 2	80	0

$$x_1 + 4x_2 = 80$$

	x_1	x_2
نقطة 1	0	60
نقطة 2	40	0

$$3x_1 + 2x_2 = 120$$

	x_1	x_2
نقطة 1	0	100
نقطة 2	60	0

$$5x_1 + 3x_2 = 300$$

	x_1	x_2
نقطة 1	0	20
نقطة 2	-20	0

$$-x_1 + x_2 = 20$$

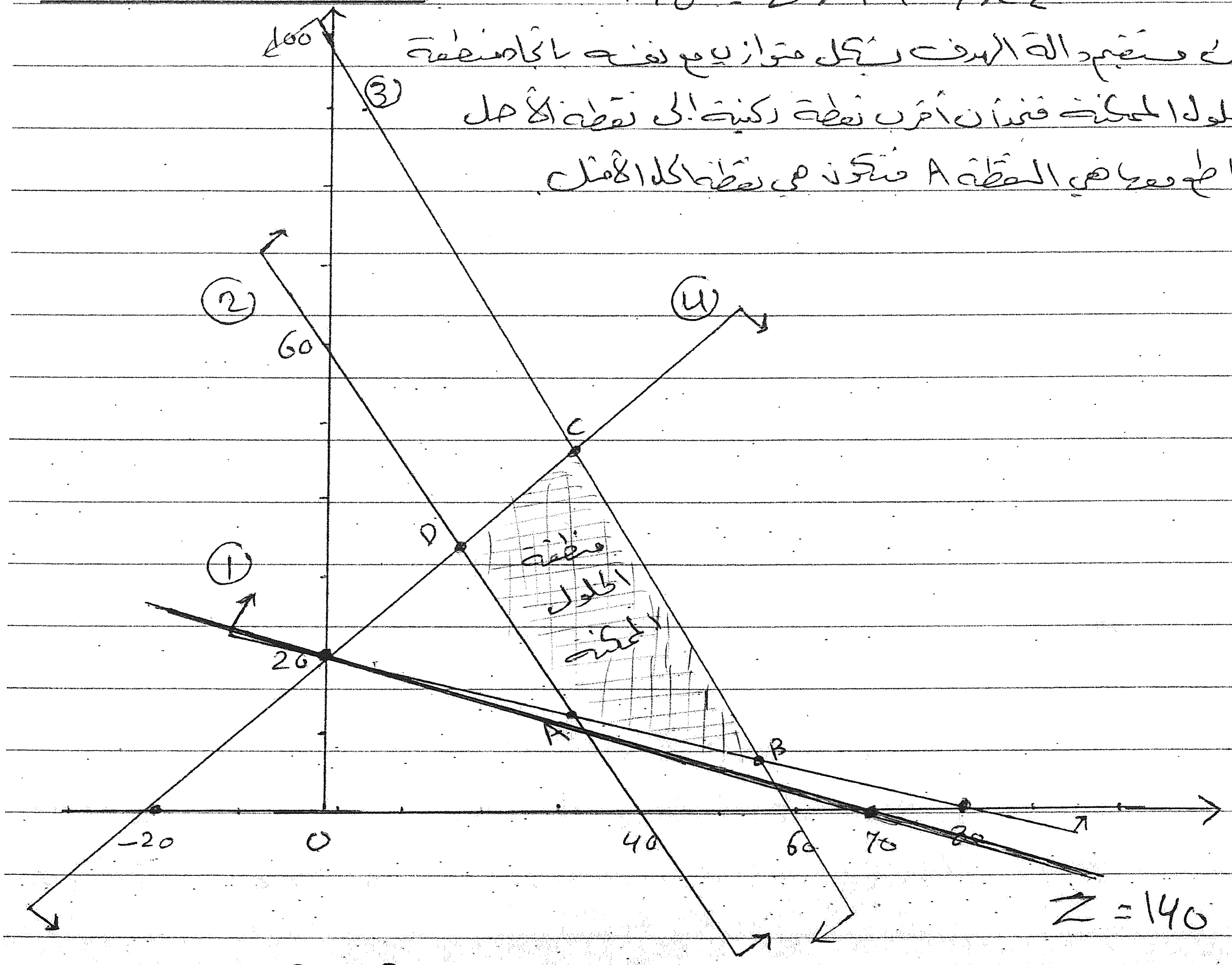
	x_1	x_2
نقطة 1	0	20
نقطة 2	70	0

لرسم دالة الهدف نفرض Z = 140

نعوض في دالة الهدف :

$$140 = 2x_1 + 7x_2$$

نحرك مستقيم دالة الهدف بشكل متوازي مع نفسه باتجاه منطقة الحلول الممكنة فنجد أن أقرب نقطة ركنية إلى نقطة الأصل يقاطعها هي النقطة A فتكون هي نقطة الحل الأمثل



* نوجد احداثيات النقطة A، تنتج من تقاطع القيدين ① و ②

بالحل المشترك للمعادلتين : $x_1 + 4x_2 = 80$ بطريقة كرامر

$3x_1 + 2x_2 = 120$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 80 & 4 \\ 120 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{160-480}{2-12} = \boxed{32} \text{ ، } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 80 \\ 3 & 120 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{120-240}{2-12} = \boxed{12}$$

نعوض في دالة الهدف قيم x_1 و x_2

$Z = 2(32) + 7(12) = 14,8$ وهي اصغر قيمة لدالة الهدف

مثال (1):

أوجد باستخدام طريقة السمبلكس حل البرنامج الخطي الآتي:

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$

القيود
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ 4x_1 \leq 100 \\ 5x_2 \leq 100 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

الخطوة الأولى: نكتب البرنامج الخطي بالشكل القياسي (المعياري):

وذلك عن طريق كتابة المتراجحات على شكل معادلات بإضافة متغيرات راكدة S إلى المتراجحات:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + S_1 &= 400 \\ 4x_1 + S_2 &= 100 \\ 5x_2 + S_3 &= 100 \end{aligned}$$

وقيود السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

$S_1, S_2, S_3 \geq 0$

الخطوة الثانية: ننشئ جدول الحل الابتدائي (الأولي)

المتغير الداخل

الصف المحوري

المتغيرات الأساسية	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الحل (المتغير الأساسي)	
	C_j	40	30	0	0	0		
S_1	0	2	4	1	0	0	400	$\frac{400}{2} = 200$
← S_2	0	$\boxed{4}$	0	0	1	0	100	$\frac{100}{4} = \boxed{25}$
S_3	0	0	5	0	0	1	100	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	$\boxed{40}$	30	0	0	0	☒	

المتغير الخارج

أقل ناتج قسمة موجب

العمود المحوري

الخطوة الثالثة: نشئ جدول الحل الثاني:

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الحل (المتغير الأساسي)	
	C_j	40	30	0	0	0		
S_1	0	0	4	1	$-\frac{1}{2}$	0	350	$\frac{350}{4} = 87{,}5$
x_1	40	1	0	0	$+\frac{1}{4}$	0	25	
← S_3	0	0	$\boxed{5}$	0	0	1	100	$\frac{100}{5} = \boxed{20}$
	Z_j	40	0	0	10	0	1000	
	$C_j - Z_j$	0	$\boxed{30}$	0	-10	0	☒	

المتغير الخارج

حسابات الجدول الثاني: "الصف الأول"

$1 - \frac{2 \times 0}{4} = 1$ $\qquad 4 - \frac{2 \times 0}{4} = 4$ $\qquad 2 - \frac{2 \times 4}{4} = 0$

$400 - \frac{2 \times 100}{4} = 350$ $\qquad 0 - \frac{2 \times 0}{4} = 0$ $\qquad 0 - \frac{2 \times 1}{4} = -\frac{1}{2}$

"الصف الثالث"

$0 - \frac{0 \times 0}{4} = 0$ $\qquad 5 - \frac{0 \times 0}{4} = 5$ $\qquad 0 - \frac{0 \times 4}{4} = 0$

$100 - \frac{0 \times 100}{4} = 100$ $\qquad 1 - \frac{0 \times 0}{4} - 1$ $\qquad 0 - \frac{0 \times 1}{4} = 0$

الخطوة الرابعة: ننظر في الصف $C_j - Z_j$ من الجدول الثاني

فنجد أنه ما زال هناك قيم موجبة وهي /30/ اذاً ما زال هنالك امكانية لتحسين الحل

نكرر الخطوة الثالثة على الجدول الثاني فنحصل منه على الجدول الثالث

ثم ننتقل إلى الخطوة الرابعة مرة أخرى؛

الخطوة الثالثة (تكرار)

جدول الحل الثالث؛

الحل (المتغير الأساسي)	S_3	S_2	S_1	x_2	x_1	Z	المتغيرات
	0	0	0	30	40	C_j	الأساسية
270	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	S_1
25	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	40	x_1
20	$\frac{1}{5}$	0	0	1	0	30	x_2
1600	6	10	0	30	40	Z_j	
	-6	-10	0	0	0		$C_j - Z_j$

حسابات صفوف الجدول الثالث؛

الصف الأول؛

$$1 - \frac{4 \times 0}{5} = 1 \qquad 4 - \frac{4 \times 5}{5} = 0 \qquad 0 - \frac{4 \times 0}{5} = 0$$

$$350 - \frac{4 \times 100}{5} = 270 \qquad 0 - \frac{4 \times 1}{5} = -\frac{4}{5} \qquad -\frac{1}{2} - \frac{4 \times 0}{5} = -\frac{1}{2}$$

الصف الثاني؛

$$0 - \frac{0 \times 0}{5} = 0 \qquad 0 - \frac{0 \times 5}{5} = 0 \qquad 1 - \frac{0 \times 0}{5} = 1$$

$$25 - \frac{0 \times 100}{5} = 25 \qquad 0 - \frac{0 \times 1}{5} = 0 \qquad \frac{1}{4} - \frac{0 \times 0}{5} = \frac{1}{4}$$

الخطوة الرابعة: (تكرار) ننظر في الصف $C_j - Z_j$ من الجدول الثالث فلا نجد أي قيمة موجبة اذاً لا يوجد امكانية لتحسين الحل؛ والحل الحالي هو الحل الأمثل وهو:

$S_1 = 270$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ | $x_1 = 25$, $x_2 = 20$, $Z = 1600$

مثال (٢)

أوجد باستخدام طريقة السمبلكس حل البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 40x_1 + 30x_2 + 10x_3$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 300$$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل :

نكتب البرنامج الخطي بالصورة القياسية :

$$\max Z = 40x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + S_1 = 300$$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + S_2 = 200$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي :

المتغيرات الأسا	Z	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	S_1	S_2	الحل	
	C_j	40	30	10	0	0	(قيمة المتغيرات الأساسية)	
$\leftarrow S_1$	0	3	5	3	1	0	300	$\frac{300}{3} = \boxed{100}$
S_2	0	2	5	4	0	1	200	$\frac{200}{2} = 100$
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		$\boxed{40}$	30	10	0	0	☒	

جدول الحل الثاني :

الحل	S_2	S_1	x_3	x_2	x_1	Z	
(قيم متغيرات الأساس)	0	0	10	30	40	C_j	
100	0	1/3	1	5/3	1	40	x_1
0	1	-2/3	2	5/3	0	0	S_2
4000	0	40/3	40	200/3	40	Z_j	
	0	-40/3	-30	-110/3	0	$C_j - Z_j$	

بالنظر الى الصف $C_j - Z_j$ من الجدول الثاني فلا نجد أي قيمة موجبة، إذاً لا يمكن تحسين الحل والحل الحالي هو الحل الأمثل وهو:

$x_1 = 100$ $S_1 = 0$

$x_2 = 0$ $S_2 = 0$

$x_3 = 0$ $Z = 4000$

وظيفة :

أوجد بطريقة السمبلكس حل البرنامج الخطي الآتي :

$$Min\ Z = 20x_1 + 30x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 200$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال (3)

أوجد بطريقة السمبلكس حل البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = 40x_1 + 30x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 300$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

نكتب البرنامج الخطي بالصورة القياسية:

$$\text{Min } Z = 40x_1 + 30x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + S_1 = 300$$

$$3x_1 + 5x_2 - S_2 + R_2 = 200$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1 \geq 0$$

المتغيرات الأساسية	Z	x_1	↓ x_2	S_1	S_2	R_2	الحل	
	C_j	40	30	0	0	M		
S_1	0	2	4	1	0	0	300	$\frac{300}{4} = 75$
← R_2	M	3	5	0	−1	1	200	$\frac{200}{5} = \boxed{40}$
Z_j		$3M$	$5M$	0	$-M$	M	$200M$	
$C_j - Z_j$		$40 - 3M$	$30 - 5M$	0	M	0		

المتغيرات الأساسية	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_2	الحل
	C_j	40	30	0	0	M	
S_1	0	-2/5	0	1	4/5	-4/5	140
x_2	30	3/5	1	0	-1/5	1/5	40
Z_j		18	30	0	-6	6	1200
$C_j - Z_j$		22	0	0	6	M-6	╳

الحل :

$x_1 = 0$ $S_1 = 140$

$x_2 = 40$ $S_2 = 0$ $Z = 1200$

حل الوظيفة مثال :

الحل :

نكتب المسألة بالصورة القياسية

$$\text{Min } Z = 20x_1 + 30x_2 + MA_1 + MA_2$$

$$5x_1 + 2x_2 - S_1 + A_1 = 20$$

$$4x_1 + 4x_2 - S_2 + A_2 = 10$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي :

المتغيرات	Z	↓ x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	الحل	
الأساسية	C_j	20	30	0	0	M	M		
A_1	M	5	2	-1	0	1	0	200	$\frac{200}{5} = 40$
← A_2	M	$\boxed{4}$	4	0	-1	0	1	$\boxed{100}$	$\frac{100}{4} = 25$
Z_j		9M	6M	-M	-M	M	M	300M	
$C_j - Z_j$		20 -9M	30 -6M	M	M	0	0		

الجدول الثاني :

المتغيرات	Z	x_1	x_2	S_1	↓ S_2	A_1	A_2	الحل	
الأساسية	C_j	20	30	0	0	M	M		
← A_1	M	0	-3	-1	$\boxed{5/4}$	1	-5/4	$\boxed{75}$	$75 \div 5/4$ $= 60$
x_1	20	1	1	0	-1/4	0	1/4	25	
	Z_j	20	-3M +20	-M	5/4M -5	M	-5/4M +5	75M + 500	
$C_j - Z_j$		0	3M +10	M	-5/4M +5	0	9/4M -5		

الجدول الثالث :

الحل	A_2	A_1	S_2	S_1	x_2	x_1	Z	المتغيرات
	M	M	0	0	30	20	C_j	الأساسية
60	-1	4/15	1	-4/15	-12/5	0	0	S_2
40	0	4/20	0	-4/20	8/120	1	20	x_1
800	0	4	0	-4	8	20		Z_j
	M	M-4	0	4	22	0		$C_j - Z_j$

ننظر إلى الصف $C_j - Z_j$ نجد أن جميع القيم موجبة أو صفر
هذا يعني أن هذا الجدول يعطي الحل الأمثل وهو :

$x_1 = 40 \qquad S_1 = 0$

$x_2 = 0 \qquad S_2 = 60 \qquad Z = 800$

الموضوع : حل مسائل النقل التاريخ / / 20

مثال (١)

أوجد الحل الأولي الأساسي لمسألة النقل الآتية باستخدام طريقة الزاوية الغربية الشمالية ثم اختبر مثالية الحل باستخدام طريقة حجر المسافات:

لدى مصنع للسيراميك ثلاث مستودعات في مناطق مختلفة في مدينة حماة، يعمل المصنع بطاقة اسبوعية مقدارها 250 طن ويتلقى طلبات من ثلاث محلات متواجدة في أحياء مختلفة من المدينة وتختلف تكاليف النقل حسب موقع المستودع، يرغب المدير في معرفة أفضل طريقة لتوزيع الطلبات على المحلات بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن.

اذا علمت أن تلك التكاليف لكل طن كما يلي:

المتوافر	النصر	المدينة	الدباغة	إلى المستودع
60	14	4	18	الأول
90	4	16	6	الثاني
100	10	16	16	الثالث
250	30	60	160	المطلوب

الحل :

المتوافر	النصر	المدينة	الزرقاء	
60 ①	$\boxed{14}$	$\boxed{4}$	$\boxed{18}$ 60	الأول
90 ②	$\boxed{4}$	$\boxed{16}$	$\boxed{6}$ 90	الثاني
~~100~~ ~~90~~ 30	$\boxed{10}$ ~~30~~	$\boxed{16}$ ~~60~~	$\boxed{16}$ 10	الثالث
250	30	60	~~160~~	المطلوب
	⑤	④	~~100~~ ③ 10	

الحل الأولي :

$x_{11}=60$ $x_{21}=90$ $x_{31}=10$

$x_{32}=60$ $x_{33}=30$

المتوافر	النصر	المدينة	الزرقاء	
60	$\boxed{14}$	$\boxed{4}$	$\boxed{18}$ 60	الأول
90	$\boxed{4}$	$\boxed{16}$	$\boxed{6}$ 90	الثاني
100	$\boxed{10}$ 30	$\boxed{16}$ 60	$\boxed{16}$ 10	الثالث
250	30	60	160	

التكلفة الابتدائية :

$$x_o = 60\times18 + 90\times6 + 10\times16 + 60\times16$$
$$+ 30\times10 = 3040$$

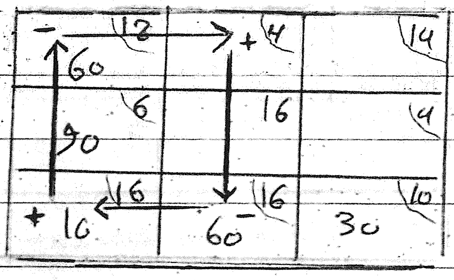
اختبار مثالية الحل :

نحسب كلفة دخول المتغيرات غير الاساسية بالحل عن طريقة تقييم الخلايا الفارغة كالتالي :

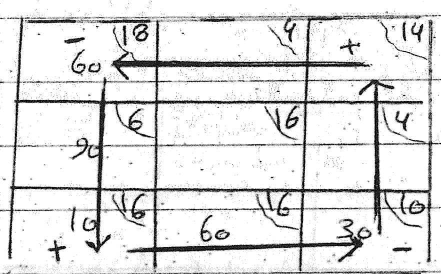
حساب التكلفة (صافي التغيير)	المسار	الخلية الفارغة
$4-18+16-16=-14$ ←	$x_{12}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}$	x_{12}
$14-18+16-10=2$	$x_{13}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{13}$	x_{13}
$16-6+16-16=10$	$x_{22}\rightarrow x_{21}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{22}$	x_{22}
$4-6+16-10=4$	$x_{23}\rightarrow x_{21}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}$	x_{23}

للتوضيح

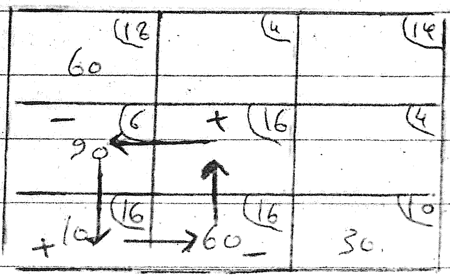
x_{12}



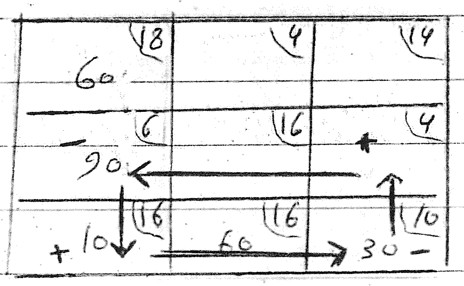
x_{13}



x_{22}



x_{23}



المتوافر	البصرة	المدينة	الديوانية	
60	$\boxed{14}$	$\boxed{4}$ 60	$\boxed{18}$	الأول
90	$\boxed{4}$	$\boxed{16}$.	$\boxed{6}$ 90	الثاني
100	$\boxed{10}$ 30	$\boxed{16}$ 0	$\boxed{16}$ 70	الثالث
250	30	60	160	المطلوب

التكلفة :

$$60 \times 4 + 90 \times 6 + 70 \times 16 + 0 \times 16 + 30 \times 10$$
$$= 2200$$

توضيح : بعد حساب معاملات التغير لكل خلية فارغة نختار الخلية ذات أكبر قيمة سالبة وهي : 14- ونعود إلى المسار المغلق لها ، بعدها ننظر إلى الخلايا التي تكون إشارات سالبة ثم نختار الخلية ذات الرقم الأصغر (قيمة المتغير) وهي بهذه الحالة 60

بذلك نجد قيمة المتغير الداخل فيصبح 60 كقيمة للمتغير x_{21} ونطرح هذه القيمة نفسها من الخلايا التي تكون إشارة سالبة ونضيفها إلى الخلايا التي تكون إشارة موجبة ، ونترك الخلية x_{11} فارغة ، ونرجع الخلايا الباقية كما هي ، فالقيمة هنا صار المتغير x_{21} فقط

$\Leftarrow$ $60 - 60 = 0$ ، $70 = 60 + 10$

للتأكد من أن الحل الحالي هو الحل الأمثل نعيد حساب معاملات التغير للخلايا الفارغة ، ونلاحظ عدم وجود قيم سالبة وبالتالي فإن الحل الحالي هو الأمثل .

مثال (٢)

أوجد الحل الأساسي الأولي لمسألة النقل الآتية باستخدام طريقة أدنى تكلفة ثم أمثلة الحل باستخدام طريقة حجر المسافات :

					المتوافر
	6	16	20	18	60
	16	16	18	14	200
	10	20	10	6	90
المطلوب	110	90	60	90	350

الحل :

			②		
6 60	16	20	18	60	①
16 50	16 90	18 60	14	~~200~~	~~150~~ ~~60~~ 0
10	20	10	6 90	90	②
~~110~~	90	60	90	350	
~~50~~ 0					

الحل الأولي :

$x_{11}=60$, $x_{21}=50$, $x_{22}=90$, $x_{23}=6$, $x_{34}=90$

التكلفة الابتدائية :

$$x_0 = 60\times6 + 50\times16 + 90\times16 + 60\times18 + 90\times6$$

$$= 4220$$

اختبار مثالية الحل :

نلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية) لا تحقق الشرط $m+n-1$ لذلك نضع صفر في الخلية التي تحوي أدنى تكلفة ، ونظراً لأن الخليتين x_{33} و x_{31} تحويان أقل تكلفة وهي ١٠ لذلك نضع الصفر في الخلية اليسرى وهي x_{31} . ثم نبدأ باختبار مثالية الحل :

	1	2	3	4	
1	$\boxed{6}$ 60	+10 $\boxed{16}$	+12 $\boxed{20}$	+16 $\boxed{18}$	60
2	$\boxed{16}$ 50	$\boxed{16}$ 90	$\boxed{18}$ 60	+2 $\boxed{14}$	200
3	$\boxed{10}$ 0	+10 $\boxed{20}$	-6 $\boxed{10}$	$\boxed{16}$ 90	90
	110	90	60	90	350

الآن نبدأ بحساب تكلفة دخول المتغيرات غير الأساسية إلى الحل عن طريق تقييم الخلايا الفارغة (حساب صافي التغير)

$x_{12} \overset{\text{المسار}}{=} x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \Rightarrow x_{12} = 16 - 16 + 16 - 6 = +10$

$x_{13} = x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{43} \Rightarrow x_{13} = 20 - 18 + 16 - 6 = +12$

$x_{14} = x_{14} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{14} \Rightarrow x_{14} = 18 - 6 + 10 - 6 = +16$

$x_{24} = x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{24} \Rightarrow x_{24} = 14 - 6 + 10 - 16 = +2$

$x_{32} = x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \Rightarrow x_{32} = 20 - 16 + 16 - 10 = +10$

$x_{33} = x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{33} \Rightarrow x_{33} = 10 - 18 + 16 - 10 = \boxed{-6}$

نلاحظ أن الخلية x_{33} هي الخلية ذات أكبر قيمة سالبة لحساب التحسين
لذلك فهي التي تحدد المتغير الخارج
بناءً عليه نعود إلى مسارها و نطرح قيمة المتغير الذي تحويه هذه الخلية من الخلايا
التي تتضمن إشارة السالب و نضيف هذه القيمة إلى الخلايا التي تكون إشارة
موجب. وطالما أن قيمة المتغير هنا هي صفر بناءً عليه فإن التغير سيقتصر
على نقل الصفر من الخلية x_{31} إلى الخلية x_{33}.

6 60	16	20	18	60
16 50	16 90	18 60	14	200
16	20	10 0	6 90	90
110	90	60	90	350

التكلفة !

$$60\times6+50\times16+90\times16+60\times18+0\times10+90\times6$$
$$=4220$$

بإعادة حساب التغير للخلايا الفارغة نلاحظ أن القيم الناتجة جميعها موجبة
بناءً عليه فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل.

ملاحظة !

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية إذا أشبع عمود وصف بآن واحد
"نشطب الصف والعمود ونتابع" والأمر ينطبق على طريقة أدنى تكلفة.
- طريقة التكلفة الأقل في الجدول نتحرك من اليسار إلى اليمين ومن أعلى إلى أ
وعند التساوي نختار الذي نمر عليه أولاً.
- طريقة حجر المسافات : عند تساوي قيم المتغيرات في الخلايا التي تكون إشارة سالبة
الخلية التي تكون أعلى تكلفة هي أول من المتغير الخارج.

مثال (١)

لنفرض أنه لدينا ثلاث آلات نريد توزيعها على ثلاث أعمال بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن؛ إذا علمت أن تكلفة انجاز كل آلة محددة وفق الآتي:

الأعمال الآلات	L1	L2	L3
M1	20	27	30
M2	16	18	10
M3	12	16	14

الحل:

نلاحظ m = n = 3

الخطوة الأولى: نطرح أصغر عنصر في كل صف من جميع عناصر الصف

	L1	L2	L3
M1	0	7	10
M2	6	8	0
M3	0	4	2

الخطوة الثانية: نطرح أصغر عنصر في كل عمود من جميع عناصر العمود

	L1	L2	L3
M1	0	3	10
M2	6	4	0
M3	0	0	2

~~نلاحظ منها~~

بعد تغطية الأصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة يساوي عدد الأسطر أو الأعمدة

ومن ثم فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل :

الآلة		العمل	التكلفة
M1	→	L1	20
M2	→	L3	10
M3	→	L2	16

\+

اجمالي التكلفة : ← 46

مثال (2)

لنفرض أن لدى مستشفى الحوراني أربعة ممرضات ؛ ترغب إدارة المستشفى بتوزيع الممرضات على أربع أقسام ، وكانت التكاليف المترتبة على تخصيص كل ممرضة على كل قسم وفق الجدول :

الأقسام / الممرضات	A	B	C	D
N1	24	10	21	11
N2	14	22	10	15
N3	15	17	20	19
N4	11	19	14	13

الحل : نلاحظ $m = n = 4$

الخطوة الأولى : نطرح أصغر عنصر في كل صف من جميع عناصر الصف

	A	B	C	D
N1	14	0	11	1
N2	4	12	0	5
N3	0	2	5	4
N4	0	8	3	2

الخطوة الثانية: ~~نطرح كل عنصر من~~

نطرح أصغر عنصر في كل عمود من جميع عناصر العمود

	A	B	C	D
N_1	14	0	11	0
N_2	4	12	0	4
N_3	0	2	5	3
N_4	0	8	3	1

الخطوة الثالثة:

نغطي الأصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط: (في الجدول أعلاه)

بعد التطبيق: نلاحظ أن عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف 4 > 3

بناءً عليه:

نقوم باختيار أصغر عدد غير مغطى وهو: 1

نقوم بطرحه من جميع الأعداد غير المغطاة، وإضافته إلى الأرقام عند تقاطعات الخطوط الأفقية والعمودية.

نحصل على الجدول الآتي:

	A	B	C	D
N_1	15	0	12	0
N_2	4	11	0	3
N_3	0	1	5	2
N_4	0	7	3	0

نكرر ما ورد في الخطوة الثالثة فنجد أن عدد الخطوط الأفقية والعمودية لتغطية الأصفار في الجدول أعلاه يساوي 4 وهو يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة وبالتالي فإن الحل

الحل الحالي هو الحل الأمثل.

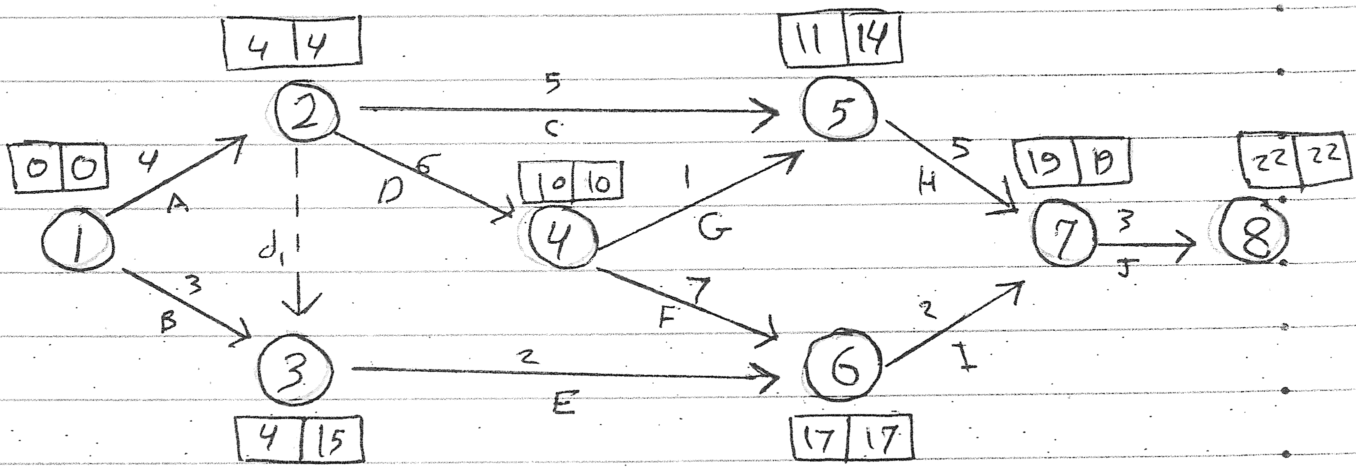
عند التخصيص: نبدأ من الصف الذي يكون صفر واحد ونقوم بالتخ
ثم نغطي بقية الأصفار في الصف والعمود وبالتالي فإن البدء
لن يكون من الصف الأول لأنه يكون صفرين.

التكلفة	القسم		الممرضة
10	C	←	N_2
15	A	←	N_3
13	D	←	N_4
10	B	←	N_1
+			
48	التكلفة الإجمالية		

الموضوع : شبكات الأعمال

مثال (٧)

لدينا شبكة الأنشطة الخاصة بأحد المشاريع ؛ والمطلوب إيجاد حسابات المسار الحرج ومن ثم تحديده، إضافة إلى إيجاد الزمن الفائض الكلي والزمن الفائض الحر لجميع الأنشطة:



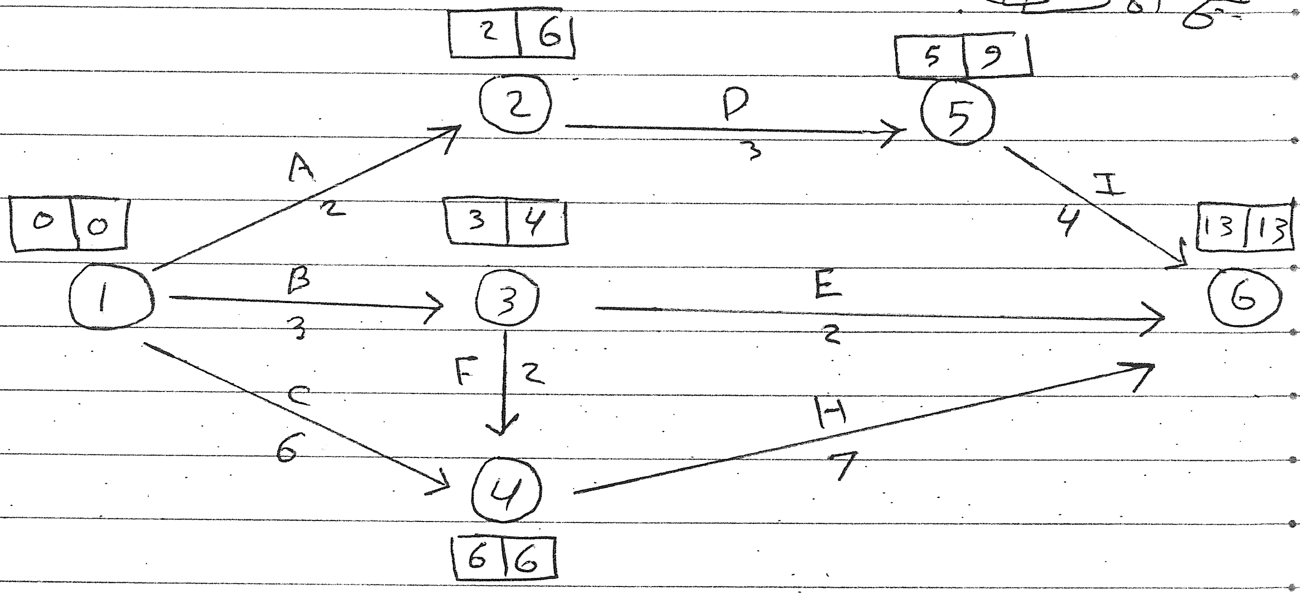
زمن تنفيذ المشروع : 22

المسار الحرج : $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$

النشاط	مدة التنفيذ	زمن البدء المبكر EST(i)	زمن الانتهاء المتأخر LFT(i)	EST(j)	LFT(j)	الكلي TF	الحر FF
حرج A	4	0	0	4	4	0	0
B	3	0	0	4	15	12	1
C	5	4	4	11	14	5	2
حرج D	6	4	4	10	10	0	0
E	2	4	15	17	17	11	11
حرج F	7	10	10	17	17	0	0
G	1	10	10	11	14	3	0
H	5	11	14	19	19	3	3
حرج I	2	17	17	19	19	0	0
حرج J	3	19	19	22	22	0	0

مثال (٢)

لدينا شبكة الأنشطة الخاصة بأحد المشاريع، والمطلوب إيجاد حسابات المسار الحرج ومنه ثم كتابته إضافة إلى إيجاد الزمن الفائض الكلي والحر لجميع الأنشطة:



زمن تنفيذ المشروع: 13

المسار الحرج C → H

النشا	T	EST(i)	LFT(i)	EST(j)	LFT(j)	TF	FF
A	2	0	0	2	6	4	0
B	3	0	0	3	4	1	0
C	6	0	0	6	6	0	0
D	3	2	6	5	9	4	0
E	2	3	4	13	13	8	8
F	2	3	4	6	6	1	1
I	4	5	9	13	13	4	4
H	7	6	6	13	13	0	0

أوجد حل البرنامج الرياضي الآتي باستخدام السمبلكس :

$Z = 30x_1 + 20x_2$ Max

$4x_1 + 2x_2 \leq 8$

$3x_2 = 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل :

$Z = 30x_1 + 20x_2 + 0S_1 - MR_2$

$4x_1 + 2x_2 + 1S_1 = 8$

$3x_2 + R_2 = 9$

داخل ↓

المتغيرات	Z	x_1	x_2	S_1	R_2		
الأساسية	Cj	30	20	0	-M	الحل	
S_1	0	4	2	1	0	8	$4 = \frac{8}{2}$
خارج ← R_2	-M	0	3	0	1	9	$3 = \frac{9}{3}$
	Zj	0	-3M	0	-M	-9M	
Cj - Zj		30	20 +3M	0	0		

داخل ↓

المتغيرات	Z	x_1	x_2	S_1	R_2	
الأساسية	Cj	30	20	0	-M	الحل
← S_1	0	4	0	1	-0.6	2
x_2	20	0	1	0	0.3	3
	Zj	0	20	0	6	60
Cj - Zj		30	0	0	-M-6	

أوجد حل البرنامج الرياضي الآتي باستخدام السمبلكس :

$Z = 30x_1 + 20x_2$ Max

$4x_1 + 2x_2 \leq 8$

$3x_2 = 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل :

$Z = 30x_1 + 20x_2 + 0S_1 - MR_2$

$4x_1 + 2x_2 + 1S_1 = 8$

$3x_2 + R_2 = 9$

داخل ↓ x_2

المتغيرات	Z	x_1	x_2	S_1	R_2		
الأساسية	Cj	30	20	0	-M	الحل	
S_1	0	4	2	1	0	8	$4 = \frac{8}{2}$
خارج ← R_2	-M	0	3	0	1	9	$3 = \frac{9}{3}$
	Zj	0	-3M	0	-M	-9M	
Cj - Zj		30	20 +3M	0	0		

داخل ↓ x_1

المتغيرات	Z	x_1	x_2	S_1	R_2	الحل
الأساسية	Cj	30	20	0	-M	
← S_1	0	4	0	1	-0,6	2
x_2	20	-0	1	0	0,3	3
	Zj	0	20	0	6	60
Cj - Zj		30	0	0	-M-6	

المتغيرات	Z	x_1	x_2	S_1	R_1	الحل
الأساسية	c_j	30	20	0	$-M$	
x_1	30	1	0	0,25	-0,15	0,5
x_2	20	0	1	0	0,3	3
	Z_j	30	20	7,5	1,5	75
$c_j - Z_j$		0	0	-7,5	$-M-1,5$	

الحل :

$Z = 75$ $x_1 = 0,5$

$x_2 = 3$

$S_1 = 0$

$R_1 = 0$

الحسابات :

الصف الأول في الجدول الثاني

$4 - \frac{2\times0}{3} = 4$ $2 - \frac{2\times3}{3} = 0$ $1 - \frac{2\times0}{3} = 1$

$0 - \frac{2\times1}{3} = -0,6$ $8 - \frac{2\times9}{3} = 2$

الصف الثاني في الجدول الثالث :

$0 - \frac{0\times4}{4} = 0$ $1 - \frac{0\times0}{4} = 1$ $0 - \frac{0\times1}{4} = 0$

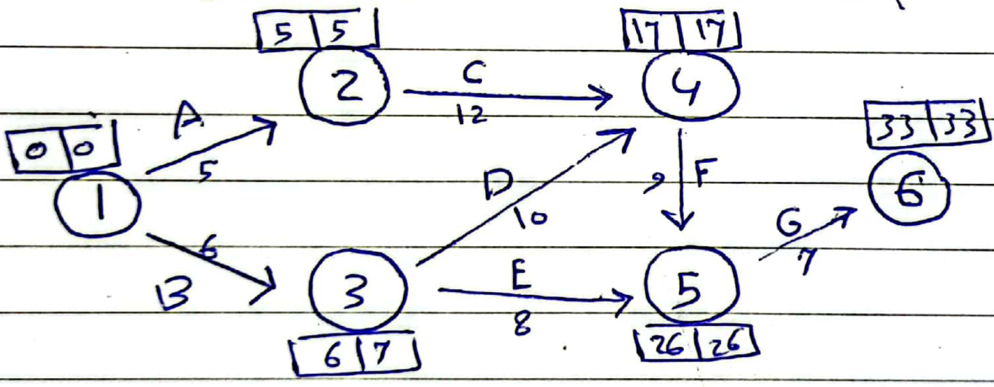
$0,3 - \frac{0\times(-0,6)}{4} = 0,3$ $3 - \frac{0\times2}{4} = 3$

مسألة :

لتكن لدينا الأنشطة والمسارات الآتية :

الزمن	النشاط السابقه	النشاط
5	—	A
6	—	B
12	A	C
10	B	D
8	B	E
9	C - D	F
7	E - F	G

المطلوب : رسم الشبكة وتمثيل الأنشطة وتحديد المسار الحرج



المسار الحرج A → C → F → G