الرياضيات الاقتصادية والمالية

القسم العملي

المتواليات العددية

نطلق على كل سلسلة اعداد توجد علاقة ثابتة بين كل عدد والعدد الذي قبله متوالية.

المتوالية العددية: تابع معرف على مجموعة من الأعداد الطبيعية n, تسمى قيمة المتوالية او التابع a_n وكل عدد في السلسلة يسمى حد المتوالية حيث nهو رقم الحد.

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

حيث $a1$ هو الحد الأول

an هو الحد العام للمتوالية

أنواع المتواليات:

1-<u>المتوالية الحسابية:</u> هي متوالية أعداد ينتج كل حد من حدودها بدءا من الحد الثاني بعد إضافة مقدار ثابت (موجب او سالب) للمقدار السابق له، يسمى المقدار الثابت الذي يضاف لأي حد بأساس المتوالية الحسابية ويرمز له بالحرف d

<u>الحد العام للمتوالية الحسابية</u> $a_n = a+(n-1)\, d$

<u>أساس المتوالية الحسابية</u> $d=a_n - a_{n-1}$

وكل حد من حدود المتوالية بدءا من حدها الثاني هو وسط حسابي للحدين المتساويان البعد عنه.

<u>مجموع حدود متوالية حسابية</u>

$$s_n=[2a+(n-1)d)]$$

وإذا أردنا كتابة العلاقة بدلالة الحد الأخير

$$s_n=\frac{n}{2}\,[a+a_n]$$

2-<u>المتوالية الهندسية:</u> هي متوالية أعاد كل حد من حدودها بدءا من الحد الثاني يساوي إلى الحد السابق له مضربا بمقدار ثابت (موجب أو سالب) المقدار الثابت هو أساس المتوالية الهندسية r والحد الأول a

أساس المتوالية الهندسية $r=\frac{a_n}{a_{n-1}}$

الحد العام للمتوالية الهندسية $a_n=a * r^{n-1}$

مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية بدءا من الحد الثاني يساوي جداء الحدين المتساويين في البعد عنه أي:

$a_k^2=a_{k-n} * a_{k+n}$

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية $S_n=\frac{a-r*a_n}{1-r}$

المتوالية الهندسية اللانهائية

هي متوالية هندسية لانهائية إذا كان أساسها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن $|r|<1$ وبملاحظة $\lim r^n=0$

مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية $S_\infty=\frac{a}{1-r}$

تمارين ومسائل غير محلولة

1-اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتواليات الآتية:

1) $a_n=2^{n-1}$

الحل:

الحد الأول عندما n=1 ، $a_1=2^{1-1}=1$

الحد الثاني عندما n=2 ، $a_2=2^{2-1}=2$

الحد الثالث عندما n=3 ، $a_3=2^{3-1}=4$

الحد الرابع عندما n=4 ، $a_4=2^{4-1}=8$

الحد الخامس عندما n=5 ، $a_5=2^{5-1}=16$

2) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$

الحل :

الحد الأول عندما n=1 ، $a_1=\frac{1-1}{1+1}=0$

الحد الثاني عندما n=2 , $a_2=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

الحد الثالث عندما n=3 ، $a_3=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

الحد الرابع عندما n=4 ، $a_4=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$

الحد الخامس عندما $n=5$، $a_5=\frac{5-1}{5+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

3) $a_n=\frac{2^{n-1}}{n!}$

الحل:

تذكر $n!$ (n عاملي) جداء الاعداد الصحيحة الموجبة قطعا والتي أصغر أو تساوي n

الحد الأول عندما $n=1$ فإن $n!=1$ وبالتالي فإن الحد الأول= $a_1=\frac{2^{1-1}}{1}=1$

الحد الثاني عندما $n=2$ فإن $n!=2*1=2$ وبالتالي فإن الحد الثاني = $a_2=\frac{2^{2-1}}{2}=1$

الحد الثالث عندما $n=3$ فإن $n!=3*2*1=6$ وبالتالي فإن الحد الثالث $a_3=\frac{2^{3-1}}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

الحد الرابع عندما $n=4$ فإن $n!=4*3*2*1=24$ وبالتالي فإن الحد الرابع $a_4=\frac{2^{4-1}}{24}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

الحد الخامس عندما $n=5$ فإن $n!=5*4*3*2*1=120$ وبالتالي فإن الحد الخامس $a_5=\frac{2^{5-1}}{120}=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$

5) $a_n=\frac{(-1)^n}{2n!}$

الحل:

الحد الأول عندما يكون $n=1$، فإن $a_1=\frac{(-1)^1}{2*1!}=\frac{1}{2}$

الحد الثاني عندما يكون $n=2$، فإن $a_2=\frac{(-1)^2}{2*2!}=\frac{1}{4*3*2*1}=\frac{1}{24}$

الحد الثالث عندما يكون $n=3$ فإن $a_3=\frac{(-1)^3}{2*3!}=\frac{-1}{6*5*4*3*2*1}=\frac{-1}{720}$

الحد الرابع عندما يكون $n=4$ فإن $a_4=\frac{(-1)^4}{2*4!}=\frac{1}{8*7*6*5*4*3*2*1}=\frac{1}{40320}$

الحد الخامس عندما يكون $n=5$ فإن $a_5=\frac{(-1)^5}{2*5!}=\frac{-1}{9*10*8*7*6*5*4*3*2*1}=\frac{-1}{3628800}$

2-أوجد الحد العام لكل من المتواليات الاتية:

1,4,7,10

الحل 10-7=3، 7-4=3،4-1=3

$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

الحل

الحد العام للمتوالية الهندسية= $a_n=2* \frac{4}{5}^{n-1}$

3-إذا علمت أن الحد رقم 21 والحد رقم 25 لمتوالية حسابية هما (64) و(106) على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية .

الحل : الحد العام للمتوالية الحسابية يعطى كمايلي $a_n = a+(n-1)\ d$

وبالتالي فإن الحد رقم (21) 64 = a+20d

والحد رقم (35) a+34 d = **بطرح** المعادلة الأولى من الثانية تصبح المعادلة 14d = 42 ومنه d=3 أي أساس المتوالية نعوض في معادلة الحد العام a+20*3=64 فتكون a=64-60=4 وهو الحد الأول

الحد الثاني 4+3=7

الحد الثالث 7+3=10

4-إذا علمت أن الحد الخامس والحد السابع لمتوالية هندسية هما: 324,2916 على الترتيب. اوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الحد العام للمتوالية الهندسية a_n=a* r^{n-1} أي a_5=a* r^4 =324

وa_7=a* r^6 =2916 بقسمة المعادلة الثانية على الأولى نجد أن r^2 =9 وبالتالي r=3

a*81=324 يؤدي a=324/81=4 الحد الثاني=4*3=12 والحد الثالث=12*3=36 أو -3 فتكون الحد الأول 4والثاني -12والثالث36.

1-اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتواليات الآتية: ص29

1) $a_n=\frac{e^n}{n^3}$

الحل:

الحد الأول عندما n=1، $a_1=\frac{2.7^1}{1^3}=7.2$

الحد الثاني عندما n=2, $a_2=\frac{2.7^2}{2^3}=\frac{72.9}{8}$

الحد الثالث عندما n=3، $a_3=\frac{2.7^3}{3^3}=\frac{19.683}{27}$

الحد الرابع عندما n=4، $a_4=\frac{2.7^4}{4^3}=\frac{53.14}{64}$

الحد الخامس عندما n=5، $a_5=\frac{2.7^5}{5^3}=\frac{143.49}{125}$

5-احسب مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية: $1,-\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64}$

الحل:

متوالية هندسية لانهائية أي أن القيمة المطلقة للأساس أصغر من الواحد

مجموع حدود المتوالية الهندسية اللانهائية $S_\infty=\frac{a}{1-r}$

الأساس= $-\frac{1}{4}$ /1 = $-\frac{1}{4}$ −

الحد الأول =1

$$S_\infty=\frac{1}{1--\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

6-أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتوالية المعرفة بالشكل: حيث a=1.

$$a_n=3\,(a_{n-1}+2)$$

$$a_2=3\,(1+2)=9$$

$$a_3=3\,(9+2)=33$$

$$a_4=3\,(33+2)=105$$

$$a_5=3\,(105+2)=321$$

7-إذا كانت :2،x،y،17 من اليمين إلى اليسار متوالية حسابية فأوجد قيم y,x.

المتوالية الحسابية الفرق بين كل حدين متتالين هو الأساس والمتوالية التي بين أيدينا فيها اربع حدود الفرق بين كل حد وماقبله d أي ان الفرق بين الحد الأخير والحد الأول هو 3d ‏17−2=3d يؤدي أن d=15/3=5

$X=2+5=7$

$Y=7+5=12$

8-إذا كان مجموع ثلاثة حدود متعاقبة في متوالية حسابية تساوي وجداؤهم يساوي 80 فأوجد الحدود الثلاثة (ارمز للحد الأوسط y)

$X+y+z=15$

$X*y*z=80$

$Y=x+z/2$(كل حد في متوالية حسابية هو متوسط الحد السابق والتالي)

$x+\frac{x+z}{2}+Z=15$ بتوحيد المقامات من خلال ضرب ب2

$2X+x+z+2z=30$

$3x+3z=30$ أي $x+z=10$ أي $y=10/2=5$ متوسط الحدين السابق واللاحق

بالتعويض في معادلة الجداء $x*5*z=80$ يؤدي $x*z=16$

عددين مجموعها 10 وجداءهما 16 فما هما

$x=2,z=8$ والجداء $16=2*8$

وبالتالي تكون المتوالية 2,5,8 في حال المتوالية متزايدة وتكون 8,5,2 في حال المتوالية متناقصة.

9-إذا علمت أن الحد الثالث في متوالية هندسية يساوي $\frac{63}{4}$ والحد السادس منها يساوي $\frac{1701}{32}$ فأوجد الحد الخامس فيها.

$\frac{63}{4}=a_3$

$a_6=\frac{1701}{32}$ المتوالية هندسية أي $r^3 = a_6 a_3 = \frac{\frac{1701}{32}}{\frac{63}{4}}$ قسمة على كسر ضرب بمقلوب الكسر$=\frac{27}{8}$ يؤدي $\frac{27}{8}$

$r=\frac{3}{2}$ فالحد الخامس في هذه المتوالية هو الحد السادس مقسما على الأساس أي $\frac{1701}{32} / \frac{3}{2} = \frac{567}{16}$

10) لدينا متوالية حسابية حدها الأول 5 والحد ال(50) فيها يساوي (103)، كم حداً يجب أن نضيف إليها ليصبح مجموعها (572).

$a_1 = 5$ و $a_{50} = 103$

$98 = a_{50} - a_1$

الفرق بين الحد الأول والحد خمسين 98 وعدد الحدود بين هذين الحدين هو 49 حد وبما ان المتوالية حسابية فان الأساس =29/98=2 أي كل حد يزيد عن الحد السابق ب2.

$$s_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)\ d]$$

$$n^2-n+n5=[2(n-1)+10]\ \frac{n}{2}=572$$

أي تصبح المعادلة0= $n^2+4n-572=0$ والحل :$(n+26)(n-22)=0$ إما $n=-26$ وهذا مرفوض لانه عدد طبيعي يجب أن يكون عدد الحدود.

أو $n=22$ وهو الحل المقبول.

13-اكتب الكسر العشري المتكرر 0.222222 بصورة كسر عادي.

الحل: $\frac{22}{100}+\frac{22}{10000}+\frac{22}{1000000}$

$$\frac{22}{100}+\frac{22}{100}*\frac{1}{100}+\frac{22}{100}*\frac{1}{100^2}$$

أي أن الحد الأول في هذه المتوالية هو $a=\frac{22}{100}$

والاساس هو $r=\frac{1}{100}$ وبما ان الأساس اصغر من 1 فالمتوالية هندسية لانهائية ومجموعها يساوي $s_\infty=\frac{a}{1-r}$

$$s_\infty=\frac{\frac{22}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{22}{99}$$

15) أوجد مجموع كل الأعداد ثلاثية الأرقام ومن مضاعفات العدد خمسة.

إذا اعتبرناها متوالية تبدأ بالعدد 100 وتزداد خمسة كل مرة وتنتهي بالعدد 995 فإن $a=100$ و $d=5$

$An=995=100+(n-1)\ 5=995$ يؤدي $n=180$

ومجموع الحدود $s_n=90\ [100+995]=98550$

16) متوالية حسابية فيها: $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=15$

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=17.5$$

أوجد حدها الأول وأساسها

نفصل المعادلة الأولى بدلالة a2 $a_2+a_2+2d+4d+a_2+6d+a_{2+6d}+a_2+8d=15$

A+5d=3

$$27.5 = 5[2a+(9)d)] = 10a+45d=27.5$$

نعوض من المعادلة الأولى قيمة a فتصبح المعادلة الثانية 10*(3-5d)+ 45d=27.5 أي -2.5=-5d أي d=0.5 وبالتالي
a=3-5*0.5=0.5

الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

تمارين ومسائل غير محلولة

1-أودع شخص مبلغاً من المال قدره 7000ل.س بفائدة مركبة معدلها 4% سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية وجد أن جملة ما تكون له 12121.76 . ص51

المطلوب: احسب مدة إيداع هذا المبلغ.

الحل:

$$C=7000,\ i=4\%,\ c_{n}= 12121.76$$

$$c_{n}=C(1+i)^{n}$$

$$12121.76 = 7000\ (1+0.04)^{n}$$

$$12121.76 - 7000 = (1+0.04)^{n}$$

$$(1.04)^{n}=1.73168$$

في حال كان الأس مجهول نأخذ لوغاريتم الطرفين لأن لوغاريتم عدد هو اس هذا العدد (ملاحظة: يرجى مراجعة بحث اللوغاريتمات في حال وجود صعوب بفهم كيف انتقلنا لهذه الخطوة).

$$\log\ (1.04)^{n}=\log 1.73168$$

$n \log(1.04)=\log 1.73168$ (خصائص اللوغاريتمات لوغاريتم عدد له اس نضرب الاس بالعدد)

$$N=\frac{\log 1.73168}{\log(1.04)}$$

$$N=\frac{0.54909}{0.0392207132}$$

$$N=14\%$$

2-احسب القيمة المستقبلية لقرض قيمته 8500 ل.س بعد 10 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 4.5% سنوياً.

$$v_{n}= v_{p(1+i)^{n}}$$

$$v_{n}= 8500\ _{(1+0.045)^{10}}$$

$$=13200$$

3-بعد مضي ست سنوات من إيداع شخص مبلغ قدره 2500ل.س في حساب التوفير بفائدة مركبة معدلها 8%، انخفض معدل الفائدة المركبة إلى 5% سنوياً.

$$c_{n}=C(1+i)^{n}$$

$$c_{n}= 2500\ (1+0.08)^{6}$$

$$=3967.185$$

$$c_{n}= 3967.185\ (1+0.05)^{10}$$

$$=6462.126$$

4-ما المبلغ الذي يجب أن تودعه الان بفائدة مركبة معدلها 8% سنويا على أساس أن الفائدة تضاف كل ثلاثة شهور ولمدة 20 عام ليصبح رصيدك 10000.

$$c_{n}=C(1+\frac{i}{m})^{m.n}$$

$$10000 =C(1+\frac{0.08}{4})^{20.4}$$

$$C=\frac{10000}{1.02^{80}}$$

$$C=\frac{10000}{4.87543}$$

$$C=2051.10$$

6-ما المدة اللازمة لإيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها 9.5 % سنوياً والفائدة تضاف كل ثلاثة شهور للحصول على مبلغ 8000 ل.س؟

$$C=5000, i=9,5\%, m=4, \quad c_{n}=8000$$

$$c_{n}=C(1+\frac{i}{m})^{m.n}$$

$$8000= 5000\ (1+\frac{0.095}{4})^{4.n}$$

$$(1.02375)^{4.n}=1.6$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين $\ln(1.6) = \ln(1.02375)^{4.n}$ من خواص اللوغاريتمات لوغاريتم الاس نضرب الاس باللوغاريتم

$$\ln(1.6) = 4n.\ln(1.02375)$$

$$4n=\frac{\ln(1.6)}{\ln(1.02375)}$$

$$N=\frac{20.02}{4}=5$$

7-أودع أحمد مبلغاً قدره 40000ل.س في مصرف لمدة ثلاث سنوات وست أشهر، فإذا علمت أن المصرف يعطي فائدة مركبة معدلها 10% سنويا. احسب: القيمة المستقبلية (الجملة)لهذا المبلغ في نهاية المدة.

$$c_{n+\frac{a}{b}}=C(1+i)^{n+\frac{a}{b}}$$

$$c_{n+\frac{a}{b}}=C(1+i)^{n+\frac{a}{b}}$$

$$=40000\ (0.1+1)^{3\frac{6}{12}}$$

$$=55838.583$$

وهذا وفق الطريقة التجارية

أما الطريقة الثانية: $c_{n+\frac{a}{b}}=C(1+\frac{a}{b}\ i)$

$$=40000\ (\frac{6}{12}.0.1+1)$$

$$=55902$$

8-ما المبلغ الذي سيصبح في حسابك بعد عامين من إيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها 8% سنويا والفائدة تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة.

C=5000, i=8%

$$A_{n}= p.e^{i.n}$$

$$A_{n}= 5000.e^{.008.2}$$

$$=5867.554355$$

9-عند شراء شخص لجهاز الحاسب، دفع من ثمنه 10000 ل.س نقدا واتفق مع البائع على دفع 7500 ل.س بعد عامين بفائدة مركبة معدلها 6% سنويا على أساس أن الفائدة تضاف مرتان في السنة، والمطلوب ما ثمن جهاز الحاسوب نقدا عند تاريخ الشراء؟

M=2,i=6%, $c_{n=7500}$

$$7500 = c\ (1+\frac{0.06}{2})^{2.2}$$

$$7500 = c\ (1+0.03)^{4}$$

$$7500 = c\ * 1.12550881$$

C=6663.528593977

هذه قيمة ال 7500 حاليا مع إضافة ال 10000الاولى يصبح ثمن الكمبيوتر حاليا 16663.528593977.

11-ما معدل الفائدة المركبة الاسمي السنوي حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور، إذا عملت أن معدل الفائدة المركبة الحقيقي السنوي هو 8.8%؟

الحل:

J= ,i=8.8%, m=4

$$J = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} \quad -1$$

$$=4[(1.88)^{\frac{1}{4}} -1$$

=%8.52

12-لدى أحد الأشخاص مبلغ 15000ل.س، أراد استثماره في أحد المصارف بفائدة مركبة فعرضت عليه ثلاثة مصارف العروض الثلاثة الاتية:

1- فائدة مركبة حقيقية معدلها 6.855% سنويا والفائدة تضاف في نهاية كل سنة.

2- فائدة مركبة معدلها 6.5% سنويا والفائدة تضاف مرتين.

3- فائدة مركبة معدلها 6.75% سنوياً والفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة. فأي عرض هو الأفضل للمستثمر؟

I 1=6.85 ،m=1،15000

I2=6.5, m=2

$$c_{n=}C(1+\frac{i}{m})^{m.n}$$

16027.5=(1.0685) 15000

$$c_{n=}15000(1+\frac{0.065}{2})^{2}$$

=15990.84375

$$c_{n=}15000(1+\frac{0.0675}{3})^{3}$$

$= 16035.452$

عرض المصرف الثالث هو الأفضل (استخرجوا نسبة الفائدة).

13-تاجر مدين بمبلغ 450000 ل.س تستحق في نهاية ست سنوات، اوجد القيمة الحالية لهذا الدين اذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 4% سنويا، ثم احسب قيمة الخصم.

$$v_{p}= v_{n(1+i)^{-n}}$$

$$=450000(1.04)^{-6}$$

$$355647.56$$

قيمة الخصم هي قيمة الدين —القيمة الحالية للدين=450000-355647.56=94358.45

14-ثلاثة ديون قيمها الاسمية 30000,40000,50000 ل.س تستحق بعد 3,5,6 سنوات على الترتيب والمطلوب:

1- اوجد القيمة الحالية للسندات الثلاثة.

2- احسب مقدار خصم الديون الثلاثة إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 7% سنوياً.

الحل:

$$24488.936=\frac{30000}{1.07^{3}}$$

$$28519.48=\frac{40000}{1.07^{5}}$$

$$33333=\frac{50000}{1.07^{6}}$$ مجموع القيم الحالية =86341.41

الخصم $= 30000 + 40000 + 50000 - 86341.41 = 33674.5$

16-شخص مدين بالسندين التاليين:

الأول قيمته 500000 ل.س يستحق الدفع بعد ثلاث سنوات من الان.

والثاني قيمته 600000 ل.س يستحق الدفع بعد خمس سنوات من الان.

يريد هذا الشخص أن يستعيض عن هذين السندين بسند وحيد يستحق بعد 7 سنوات من الان، ما القيمة الاسمية للسند الجديد اذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 6% سنويا.

$$\frac{v_{n}}{(1+i)^{n}}=\frac{v_{n1}}{(1+i)^{n1}}+\frac{v_{n2}}{(1+i)^{n2}}$$

$$\frac{v_{n}}{(1+i)^{n}}=\frac{500000}{1.191016}+\frac{600000}{1.338225577}$$

$$=419809.641+448354=868164.54=\frac{v_{n}}{1.503}$$

$$Vn=1304851$$

ملاحظة فرق الأرقام نتيجة التقريب.

17-تاجر مدين بالسندين التاليين:

سند قيمته الاسمية 200000ل.س يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الان.

وسند قيمته الاسمية 300000 ل.س يستحق السداد بعد خمس سنوات من الان.

أراد هذا التاجر استبدال هذين السندين بسندين جديدين متساويين بالقيمة الاسمية يستحق الأول بعد ست سنوات ويستحق الثاني بعد سبع سنوات علما ان معدل الفائدة المركبة 6% سنويا ما قيمة كل من السندين الجديدين؟

القيمة الحالية للديون الجديدة =القيمة الحالية للديون القديمة

$$\frac{v_{n3}}{(1+i)^{n3}}+\frac{v_{n4}}{(1+i)^{n4}}=\frac{v_{n1}}{(1+i)^{n1}}+\frac{v_{n2}}{(1+i)^{n2}}$$

$$\frac{v_{n3}}{(1.06)^{6}}+\frac{v_{n4}}{(1.06)^{7}}=\frac{20000}{(1.06)^{3}}+\frac{300000}{(1.06)^{5}}$$

$$\frac{v_{n3}}{1.4185}+\frac{v_{n4}}{1.50363}=\frac{20000}{1.191016}+\frac{300000}{1.3382255776}$$

$$\frac{v_{n3}}{1.4185}+\frac{v_{n4}}{1.50363}=\frac{20000}{1.191016}+\frac{300000}{1.3382255776}$$

$$392101.31=\frac{1.461(vn3+vn4)}{2.132899}$$

وبما أن السندين الجديدين متساويين بالقيمة الاسمية فان vn3=vn4 أي

286212.351=2/1461/2.132899*392101.31=

الدفعات الدورية

تمارين ومسائل غير محلولة

1-اشترى شخص شقة سكنية واتفق على دفع الثمن كالآتي:

- 20000 ل.س
- 1000ل.س في آخر كل سنة ولمدة 10 سنوات. ص65

المطلوب: ما ثمن الشقة السكنية نقدا إذا حسبت الفائدة بمعدل 5% سنوياً.

الحل:

ملاحظة: القيمة الحالية للدفعات تعبر عن الثمن النقدي أما جملة الدفعات فتعبر عن اجمالي المبلغ مع فوائده

$$v_{p}= R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

R=1000, n=10, i=0.05

$$v_{p}= \frac{1-(1+0.05)^{-10}}{0.05}1000$$

$$v_{p}=7721.735$$

هذه القيمة الحالية للدفعة التي قيمتها 1000 إذا اضفنا ال20000 النقدية تكون قيمة الشقة نقدا هي 20000+7721.735 =27721.735.

2- اقترضت إحدى الشركات مبلغ 500000ل.س، وتعهدت بسداده على عشرين دفعة سنوية فما قيمة كل دفعة إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 5% سنوياً؟

الحل: $v_{p}= 500000$، n=20، i=5%

$$v_{p}= R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$500000 = R\frac{1-(1+0.05)^{-20}}{0.05}$$

$$R=\frac{500000}{55.79}$$

$$R=8962.1796$$

3-دفعة سنوية عادية مدتها خمس سنوات، وجد أن جملتها على أساس معدل فائدة مركبة 2% سنوياً تساوي 5204ل.س ما القيمة الحالية للدفعات في أول السنوات الخمس؟

$$v_{n}=r\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$5204 = r\,\frac{(1+0.02)^5-1}{0.02}$$

$$R = 1000$$

$$v_p = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

$$v_p = 1000\,\frac{1-(1+0.02)^{-5}}{0.02}(1+0.02) = 4809.3$$

4-دفعات عادية سنوية مبلغها 100 ل.س، وجد أن قيمتها الحالية على أساس معدل فائدة مركبة 2.5% سنوياً هي 875.210 ل.س. ما مدة الدفعات؟

$R=100, i=2.5\%, v_p=875.210$ المجهول هي n

$$875.210 = 100\,\frac{1-(1+0.025)^{-n}}{0.025}$$

$$\frac{1-(1+0.025)^{-n}}{0.025} = 8.75210$$

$$(1.025)^{-n} = 1.2188$$

$$\ln(1.2188) = -n.\ln(1.025)$$

$$-N = \frac{\ln(1.2188)}{\ln(1.025)}$$

$$N = \frac{0.247}{0.024}$$

$N=10.29$ تقريبا 10

5-يودع شخص في مصرف آخر كانون الأول من كل عام (500) ل.س ابتداء من آخر كانون عام 1990، وبعد إيداع الدفعة مباشرة في سنة معينة وجد أن رصيده 3661.500. أوجد تلك السنة المعينة إذا كان معدل الفائدة المركبة 15% سنوياً.

الحل:

$$n=?،i=0.15،R=500,\ v_{n=3661.500}$$

$$v_n=r\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$3661.500=500\frac{(1+0.15)^n-1}{0.15}$$

نقسم على 500 فتصبح

$$7.323=\frac{(1.15)^n-1}{0.15}$$ نضرب الطرفين في الوسطين

$$(1.15)^n-1=1.09845$$ ننقل ال1 للطرف الثاني

$$(1.15)^n=2.09845$$

في حال كان الأس مجهول نأخذ لوغاريتم الطرفين لأن لوغاريتم عدد هو اس هذا العدد (ملاحظة: يرجى مراجعة بحث اللوغاريتمات في حال وجود صعوب بفهم كيف انتقلنا لهذه الخطوة)

$$\ln (1.15)^n=\ln 2.09845$$

$n\ln(1.15)=\ln 2.09845$ (خصائص اللوغاريتمات لوغاريتم عدد له اس نضرب الاس بالعدد)

$$N=\frac{\ln 2.09845}{\ln(1.15)}$$

$$N=\frac{1.09343}{0.13976}$$

$$N=7.8$$

تقريبا سبع سنوات.

7-أودع شخص في أحد المصارف عددا من الدفعات السنوية المتساوية قيمة كل منها (500) ل.س في أول كل سنة بفائدة مركبة 3% سنوياً، فحصل في نهاية المدة على مبلغ 9568.44ل.س والمطلوب: احسب عدد هذه الدفعات.

$$v'_{n}= r\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+\mathrm{i})$$

$$9568.44 = 500\frac{(1+0.03)^n-1}{0.03}(1+0.03)$$

نقسم على 500 و(1.03)

$$18.579 = \frac{(1.03)^n-1}{0.03}$$

نضرب الطرفين في الوسطين $(1.03)^n - 1=0.557$ وننقل 1 للطرف الثاني

$(1.03)^n=1.0557$ نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln (1.03)^n=\ln 1.0557$$

$$n \ln(1.03)=\ln 1.0557$$

$$N=\frac{\ln 1.0557}{\ln(1.03)}$$

$$N=14.978$$

أي تقريبا 14 دفعة.

8-ما المبلغ الواجب إيداعه في بداية كل سنة للحصول على مبلغ قدره 6500ل.س ولمدة ثلاث سنوات على أساس معدل فائدة مركبة 4% سنوياً؟

الحل:

في بداية السنة يعني دفعة فورية

لكي احصل على 6500 أي ان هذا المبلغ هو جملة الدفعات

نضع قانون جملة الدفعات الفورية

$$v'_{n}= r\,\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+\mathrm{i})$$

نعوض

$$6500 = r\,\frac{(1+0.04)^3-1}{0.04}(1+0.04)$$

$$6250 = r * 3.1216$$

$$R=2002.178$$

9-يرغب شخص بتكوين رأسمال 1000000، بإيداع 60 دفعة شهرية على أساس فائدة مركبة معدلها 9% سنوياً والفائدة تضاف شهريا والمطلوب ما مقدار القسط الشهري الواجب إيداعه؟

الحل:

$m.n= 60$ ،$r=?,i=0.09$، $v_{n=}1000000$

بما أن الفائدة تضاف شهريا فإن $j=i/m=0.09/12=0.0075$

$$v_{n=}\ r\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$1000000 = r\frac{(1+0.0075)^{60}-1}{0.0075}$$

$$r=\frac{1000000}{75.424}$$

$r=13258.379$ مقدار القسط الشهري.

10-يرغب شخص ببيع سيارته نقدا بمبلغ 2400 وحدة نقدية، وفي حالة البيع بالتقسيط يتم السداد على دفعات شهرية عادية مدته (24) شهراً، فإذا كان معدل الفائدة الشهرية 1%احسب قيمة القسط الشهري الذي سيقبضه بائع السيارة. وما مقدار الفائدة المستحقة.

الحل:

$r=?$، $n=24,i=1\%\ v_{p=2400}$

نلاحظ أن الفائدة مباشرة معطاة شهرية فلا داعي للتقسيم والمدة معطاة أيضا بشكل شهري

$$v_{p=}\ r\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$2400 = \ r\frac{1-(1+0.01)^{-24}}{0.01}$$

$$R=\frac{2400}{21.243}$$

R= 112.978

اجمالي المبلغ =القسط الشهري * عدد الدفعات

=112.978*24=2711.472

الفائدة المستحقة =اجمالي المبلغ−المبلغ النقدي=2711.47−2400=

311.472

11−طلب أحد المتبرعين من مصرف أن يدفع 1000 ل.س كل ستة شهور لجمعية خيرية مدى الحياة. احسب ما يجب أن يدفعه المتبرع للمصرف مقدماً، علماً أن معدل الفائدة المركبة السنوية 4% والفائدة تضاف مرتين في السنة في الحالتين الاتيتين:

1−إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في أول كل ستة شهور.

2−إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في آخر كل ستة شهور.

الحل:

1- الدفعات فورية:

$R=1000, i=0.04, m=2, j=i/2=0.02$

$$v_{\infty}=\frac{r}{j}$$

$$v_{\infty}=\frac{1000}{0.02}$$

$$v_{\infty}=50000$$

2- الدفعات عادية:

$$v_{\infty}=\frac{r(1+j)}{j}$$

$$v_{\infty}=\frac{1000(1+0.02)}{0.02}$$

$$v_{\infty}=51000$$

النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات

نموذج ليونتيف

تمارين ومسائل غير محلولة

1-لتكن مصفوفة المعاملات الفنية لاقتصاد دولة ما، وشعاع الناتج الكلي محددان كالتالي:

$$A=\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{matrix} ، \quad X=\begin{matrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{matrix}$$

المطلوب: 1-أوجد شعاع الطلب النهائي، واستنتج مجموع القيم المضافة. 2-تنظيم جدول التشابكات القطاعية بشكل كامل.

الحل: حسب قانون الطلب فإن Y=|I-A| X

حيث
$$I-A=\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}-\begin{matrix}0.2&0.3&0.1\\0.3&0.3&0.3\\0.1&0.2&0.2\end{matrix}$$

$$I-A=\begin{matrix}0.8&-0.3&-0.1\\-0.3&0.7&-0.3\\-0.1&-0.2&0.8\end{matrix}$$

Y=|I-A| X (نضرب عناصر السطر الأول بالعمود الأول فينتج العنصر الأول أي

(0.8*1000+-0.3*1000+-0.1*1000)=400 وهكذا

$$\begin{matrix}0.8&-0.3&-0.1\\-0.3&0.7&-0.3\\-0.1&-0.2&0.8\end{matrix}\quad\begin{matrix}1000\\1000\\1000\end{matrix}$$

$$Y=\begin{matrix}400\\100\\500\end{matrix}$$

القيم المضافة نستخرجها من مصفوفة المعاملات الفنية حيث $X=a_{IJ} * X_{IJ}$

$$\begin{matrix}200&300&100\\300&300&300\\100&200&200\end{matrix}$$

هكذا نكون حصلنا على نسبة ما يستخدمه كل قطاع مما ينتجه القطاعات الأخرى

مجموع المدخلات الوسيطة للقطاع الأول 600 وبما اجمالي المدخلات 1000 فالقيمة المضافة 400.

اما القطاع الثاني فإن مجموع مدخلاته الوسيطة 800 وبما ان اجمالي المدخلات 1000 فالقيمة المضافة 200.

اما القطاع الثالث فإن مجموع المدخلات الوسيطة 600 والمدخلات الكلية 1000 فتكون القيمة المضافة 400.

2-جدول التشابكات القطاعية بشكل كامل.

	القطاع الأول	القطاع الثاني	القطاع الثالث	المخرجات الوسطة	الطلب النهائي	المخرجات النهائية
القطاع الاول	200	300	100	600	400	1000
القطاع الثاني	300	300	300	900	100	1000
القطاع الثالث	100	200	200	500	500	1000
المدخلات الوسطة	600	800	600	2000		
القيمة المضافة	400	200	400		1000	
إجمالي المدخلات	1000	1000	1000			3000

2-احسب حجم منتجات ثلاثة قطاعات لاقتصاد دولة ما، فيه مصفوفة المعاملات الفنية وشعاع الطلب النهائي محددان كالتالي:

$$A=\begin{matrix} 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{matrix} \qquad Y=\begin{matrix} 300 \\ 300 \\ 200 \end{matrix}$$

الحل: $X=|I-A|^{-1} * Y$

أولاً نحسب:

$$I-A=\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}-\begin{matrix}0&0.3&0.4\\0.5&0&0.2\\0.4&0.3&0.1\end{matrix}=\begin{matrix}1&-0.3&-0.4\\-0.5&1&-0.2\\-0.4&-0.3&0.9\end{matrix}$$

لحساب معكوس هذه المصفوفة حسب ما تم شرحه في المحاضرة السابقة

$$\neg(I-A)\ *\ \frac{1}{|\mathrm{I-A}|}=|\mathrm{I-A}|^{-1}$$

نحسب قيمة معين $I-A$ وتساوي=

$$(-1^2)^*\,1^*\begin{matrix}1&-0.2\\-0.3&0.9\end{matrix}+(-1^3)^*\,-0.3^*\begin{matrix}-0.5&-0.2\\-0.4&0.9\end{matrix}$$

$$+(-1^4)^*\,-0.4^*\begin{matrix}-0.5&1\\-0.4&-0.3\end{matrix}$$

$= +0.84 -0.159-0.22$

$$\frac{1}{|\mathrm{I-A}|}=2.169 \text{ و } =0.461$$

ومن ثم نجد المصفوفة المرافقة وذلك عن طريق حساب المتمم الجبري لكل عنصر ومن ثم اخذ منقول المصفوفة الجديدة بعد التعويض بالمتمم الجبري:

العنصر الأول السطر الأول $=0.84= -1^2 * \begin{matrix}1&-0.2\\-0.3&0.9\end{matrix}$

العنصر الثاني السطر الأول $=0.53 \quad -1^3 * \begin{matrix}-0.5&-0.2\\-0.4&0.9\end{matrix}$

العنصر الثالث السطر الأول $=0.55 \quad -1^4 * \begin{matrix}-0.5&1\\-0.4&-0.3\end{matrix}$

العنصر الأول السطر الثاني $=0.39 \quad -1^3 * \begin{matrix}-0.3&-0.4\\-0.3&0.9\end{matrix}$

العنصر الثاني السطر الثاني = $-1^{4} * \begin{matrix} 1 & -0.4 \\ -0.4 & 0.9 \end{matrix}$ = 0.74

العنصر الثالث السطر الثاني = $-1^{5} * \begin{matrix} 1 & -0.3 \\ -0.4 & -0.3 \end{matrix}$ = 0.42

العنصر الاول السطر الثالث = $-1^{4} * \begin{matrix} -0.3 & -0.4 \\ 1 & -0.2 \end{matrix}$ = 0.46

العنصر الثاني السطر الثالث = $-1^{5} * \begin{matrix} 1 & -0.4 \\ -0.5 & -0.2 \end{matrix}$ = 0.4

العنصر الثالث السطر الثالث = $-1^{6} * \begin{matrix} 1 & -0.3 \\ -0.5 & 1 \end{matrix}$ = 0.85

$$\begin{matrix} 0.84 & 0.53 & 0.55 \\ 0.39 & 0.74 & 0.42 \\ 0.46 & 0.4 & 0.85 \end{matrix}$$

ومن ثم نأخذ منقول المصفوفة وذلك بقلب الاسطر أعمدة

$$\begin{matrix} 0.84 & 0.39 & 0.46 \\ 0.53 & 0.74 & 0.4 \\ 0.55 & 0.42 & 0.85 \end{matrix}$$

بعد ذلك نحسب مقلوب المصفوفة =

$$2.169 * \begin{matrix} 0.84 & 0.39 & 0.46 \\ 0.53 & 0.74 & 0.4 \\ 0.55 & 0.42 & 0.85 \end{matrix} = \begin{matrix} 1.822 & 0.846 & 0.998 \\ 1.150 & 1.605 & 0.868 \\ 1.193 & 0.911 & 1.844 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{matrix} = \begin{matrix} 1.822 & 0.846 & 0.998 \\ 1.150 & 1.605 & 0.868 \\ 1.193 & 0.911 & 1.844 \end{matrix} * \begin{matrix} 300 \\ 300 \\ 200 \end{matrix}$$

وهذه حجم منتجات ثلاث قطاعات اما جدول المخرجات والمدخلات

المخرجات النهائية	الطلب النهائي	المخرجات الوسطة	القطاع الثالث	القطاع الثاني	القطاع الأول	
1000	300	700	400	300	0	القطاع الاول
1000	300	700	200	0	500	القطاع الثاني
1000	200	800	100	300	400	القطاع الثالث
		2200	700	600	900	المدخلات الوسطة
	800		300	400	100	القيمة المضافة
3000			1000	1000	1000	إجمالي المدخلات

3- إذا علمت أن إجمالي الناتج القومي في دولة ما في سنة معينة كان 1400 مليون وحدة نقدية موزعة كالتالي: 500 مليون وحدة نقدية إنتاج صناعي، 600 مليون وحدة نقدية انتاج زراعي، 300 مليون وحدة نقدية خدمات و أن مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج هي:

$$\begin{matrix} 0.30 & 0.20 & 0.20 \\ 0.30 & 0.35 & 0.10 \\ 0.20 & 0.10 & 0.20 \end{matrix}$$

المطلوب إعداد جدول المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد.

المخرجات النهائية	الطلب النهائي	المخرجات الوسطة	الخدمات	الزراعة	الصناعة	
500	150	350	100	100	150	الصناعة

الزراعة	180	210	60	450	150	600
الخدمات	60	30	60	150	150	300
المدخلات الوسطة	390	340	220	950		
القيمة المضافة	110	260	80		450	
إجمالي المدخلات	500	600	300			1400

4-ناقش مدى واقعية خطة اقتصادية تستهدف تحقيق طلب نهائي قدره:

95 مليون وحدة نقدية موزعة كالتالي:

60 مليون وحدة نقدية صناعية.

20 مليون وحدة نقدية زراعة.

15 مليون وحدة نقدية خدمات.

مع العلم أن مصفوفة المعاملات الفنية معطاة بالعلاقة:

$$A=\begin{matrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.03 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 \end{matrix}$$

وأن الطاقات الإنتاجية القصوى هي:

100 مليون وحدة نقدية للصناعة.

35 مليون وحدة نقدية للزراعة.

30 مليون وحدة نقدية للخدمات.

$$Y=\begin{matrix}60\\20\\15\end{matrix}$$

نحسب I-A

$$I\text{-}A=\begin{matrix}0.7 & -0.2 & -0.2\\ -0.2 & 0.9 & -0.03\\ -0.1 & -0.05 & 0.9\end{matrix}$$

ومن ثم نحسب $|I\text{-}A|=$

$$-1^{2}*0.7*\begin{matrix}0.9 & -0.03\\ -0.05 & 0.9\end{matrix}+(-1^{3})*\ \text{-}0.2*\begin{matrix}-0.2 & -0.03\\ -0.1 & 0.9\end{matrix}$$

$$-1^{4}*\text{-}\ 0.2*\begin{matrix}-0.2 & -0.9\\ -0.1 & -0.05\end{matrix}=$$

$1.963=\frac{1}{I-A||}=$والمقلوب $0.5094=+0.566-0.0366+0.02=$

نحسب المتممات الجبرية

$$0.81=-1^{2}*\begin{matrix}0.9 & -0.03\\ -0.05 & 0.9\end{matrix}$$

$$0.183=-1^{3}*\begin{matrix}-0.2 & -0.03\\ -0.1 & 0.9\end{matrix}$$

$$0.1=-1^{4}*\begin{matrix}-0.2 & 0.9\\ -0.1 & -0.05\end{matrix}$$

$$0.19=-1^{3}*\begin{matrix}-0.2 & -0.2\\ -0.05 & 0.9\end{matrix}$$

$$0.61=-1^{4}*\begin{matrix}0.7 & -0.2\\ -0.1 & 0.9\end{matrix}$$

$$0.055 = -1^{5} * \begin{matrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.1 & -0.05 \end{matrix}$$

$$0.186 = -1^{4} * \begin{matrix} -0.2 & -0.2 \\ 0.9 & -0.03 \end{matrix}$$

$$0.061 = -1^{5} * \begin{matrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & -0.03 \end{matrix}$$

$$0.59 = -1^{6} * \begin{matrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 \end{matrix}$$

أي تصبح المصفوفة
$$\begin{matrix} 0.81 & 0.183 & 0.1 \\ 0.19 & 0.61 & 0.055 \\ 0.186 & 0.061 & 0.59 \end{matrix}$$

ونأخذ المنقول
$$\begin{matrix} 0.81 & 0.19 & 0.186 \\ 0.183 & 0.61 & 0.061 \\ 0.1 & 0.055 & 0.59 \end{matrix}$$

ونضربها بمقلوب معين المصفوفة الذي استخرجناه 1.963

$$\begin{matrix} 1.586 & 0.372 & 0.365 \\ 0.359 & 1.196 & 0.12 \\ 0.196 & 0.108 & 1.157 \end{matrix}$$

ونضربها بشعاع الطلب
$$Y = \begin{matrix} 60 \\ 20 \\ 15 \end{matrix}$$

فتنتج شعاع الناتج الكلي
$$X = \begin{matrix} 108.075 \\ 47.26 \\ 31.275 \end{matrix}$$

ولكن نجد أن هذه الخطة غير واقعية لأنها تفوق الطاقة القصوى لقطاع الزراعة والصناعة، ونحتاج لتخفيض الإنتاج ليلائم الطاقة القصوى أي
$$\Delta X = \begin{matrix} -8.075 \\ -12.26 \\ -1.275 \end{matrix}$$

وبالتالي تكون

$$\Delta Y = \begin{matrix} 0.7 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 & -0.03 \\ -0.1 & -0.05 & 0.9 \end{matrix} * \begin{matrix} -8.075 \\ -12.26 \\ -1.275 \end{matrix}$$

$$\Delta Y = \begin{matrix} -3.456 \\ -9.457 \\ 2.568 \end{matrix} = \text{التغير في الطلب}$$

$$Y' = \begin{matrix} 57.05 \\ 10.62 \\ 15.273 \end{matrix}$$ الطلب الجديد بعد جمع مصفوفة تغير الطلب

$$X' = \begin{matrix} 1.486 & 0.349 & 0.341 \\ 0.336 & 1.119 & 0.112 \\ 0.184 & 0.1 & 1.083 \end{matrix} * \begin{matrix} 57.05 \\ 10.62 \\ 15.273 \end{matrix}$$

$$X' = \begin{matrix} 100 \\ 35 \\ 29.99 \end{matrix}$$ ونجد أن الإنتاج الكلي بعد ضرب مصفوفة المعاملات بالطلب الجديد انخفض

نتيجة تعديل الخطة ليصبح ضمن الطاقة القصوى للإنتاج مما يعني أن الخطة أصبحت واقعية ومناسبة.

تطبيق التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية

تمارين ومسائل غير محلولة

المبحث الثالث (تطبيق التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية)

التمرين 1: تبين لأحد مراكز توزيع التجزئة أنه يمكن أن يبيع أسبوعياً في عام 2005 أربعة صناديق من الكونسروة على الأكثر، فإذا علمت أن تكلفة الصندوق 100ل.س. وأن ثمن بيعه هو 150 ل.س، علما أن الكونسروة تتلف إذا لم تباع في نفس الأسبوع) وفيما يلي توزيع أسابيع عام 2005 بحسب عدد الصناديق المباعة.

عدد الصناديق المباعة m_k	عدد الأسابيع n_i

0	7
1	8
2	10
3	12
4	15
المجموع	52

فإذا كانت الخطط التي قرر مدير هذا المركز اختيار إحداها بالنسبة لأي أسبوع من أسابيع عام 2006 هي:

الخطة الأولى Q1: التعامل في صندوقين

الخطة الثانية Q2:التعامل في ثلاثة صناديق.

الخطة الثالثة Q3: التعامل في أربعة صناديق.

وبفرض أن حالات الطلب هي:

الحالة الأولى D1: الطلب رديء إذا تم بيع صندوقين على الأكثر

الحالة الثانيةD2:طلب معتدل إذا تم بيع ثلاثة صناديق.

الحالة الثالثة D3:طلب ممتاز إذا تم بيع أربعة صناديق.

فالمطلوب : تحديد الخطة الأفضل لهذا المركز، والتي بمقتضاها يحقق أكبر منفعة متوقعة نتيجة اتباعها.

الحل: 1- حساب احتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة

P(D1), P(D2), P(D3).

يتم حساب هذه الاحتمالات استنادا إلى البيانات التي تمكن المركز من جمعها وباستخدام

توزيع ثنائي الحدين: $P(Di) = c_m^k * p^k * q^{m-k}$

$vK=0,1,2,3,4$ حيث p احتمال بيع الكونسروة و q احتمال عدم بيع الكونسروة.

نوجد احتمال بيع الكونسروة من العلاقة $p=\frac{y}{m}$ حيث m الحد الأعلى لمبيعات الكونسروة .m=4.

Y متوسط عدد المبيعات من الكونسروة $y=\frac{\sum ni.mi}{n}$

$$Y=\frac{0*7+1*8+2*10+3*12+4*15}{52}$$

$$Y=2.38$$

$$P=\frac{2.38}{4}$$

$P=0.596$ و $q=0.404$ ومنه وبافتراض k عدد مبيعات الكونسروة:

$$P(Di) = c_m^k * p^k * q^{m-k}$$

$$0.0266= P(D1) = c_4^0 * 0.596^0 * 0.404^4$$

$c_4^1 * 0.596^1 * 0.404^3$ (لايوجد أهمية للترتيب c_1^4 c_4^1)

$$0.157=0.0659*0.596*4=$$

$$= c_4^2 * 0.596^2 * 0.404^2$$

$$0.695=0.163*0.355*6$$

$$P(D1)=0.0266+0.157+0.34765=0.59$$

$$P(D2) = c_4^3 * 0.596^3 * 0.404^1$$

$=0.342$

$P(D3) = c_4^4 * 0.596^4 * 0.404^0$

$=0.126$

نجهز مصفوفة الأرباح والخسائر

$$\begin{matrix} -50 & 100 & 100 \\ -150- & 150 & 150 \\ -250 & 50 & 200 \end{matrix}$$

نضرب احتمالات الطلب بكل عمود من أعمدة المصفوفة فتنتج لدينا المصفوفة التالية

$$\begin{matrix} -26.5 & 34.2 & 12.6 \\ -79.5 & 51.3 & 18.9 \\ -132.5 & 17.1 & 25.2 \end{matrix}$$

نحسب المنفعة المتوقعة من كل خطة

المنفعة المتوقعة من الخطة الأولى=20.3

المنفعة المتوقعة من الخطة الثانية =-9.3

المنفعة المتوقعة من الخطة الثالثة=-90.4

نجد أن الخطة الأولى هي التي تحقق اعلى منفعة للبائع وهي التعامل في صندوقين .

2- قام أحد محلات الحلويات بدراسة الطلب على قوالب الكاتو التي ينتجها أسبوعياً، وقد تبين له أن عدد القوالب التي أنتجها أسبوعياً خلال عام 2005 كان 50 قالباً على الأكثر، فإذا علمت أن تكلفة إنتاج القالب 100ل.س، وأن ثمن بيعه هو 150ل.س مع العلم أن قوالب الكاتو التي تبقى حتى نهاية الأسبوع تفقد صلاحيتها، وإليك عدد القوالب التي تم إنتاجها وبيعها خلال أسابيع عام 2005،واحتمالات بيعها:

عدد القوالب المبيعة أسبوعيا N_I	P_K
46	0.06
47	0.15
48	0.27
49	0.32
50	0.2
$\sum$	1

فالمطلوب تقديم نصيحتك لمالك هذا المحل حول عدد القوالب التي ينتجها أسبوعيا عام 2006 بحيث تحقق له أكبر منفعة ممكنة، إذا علمت أن:

الخطط المتاحة لهذا المحل هي خمس خطط كما يلي:

الخطة الأولى Q1:إنتاج 46 قالباً.

الخطة الثانية Q2:إنتاج 47 قالباً.

الخطة الثالثة Q3: إنتاج 48 قالباً.

الخطة الرابعة Q4:إنتاج 49 قالباً.

الخطة الخامسة Q5:إنتاج 50 قالباً.

وحالات الطلب المختلفة هي كما يلي:

الحالة الأولى D1: طلب مقبول إذا تم إنتاج 46 أو 47 قالب كاتو أسبوعياً.

الحالة الثانية D2:طلب متوسط إذا تم إنتاج 48 قالب كاتو أسبوعياً.

الحالة الثالثة D3:طلب جيد إذا تم إنتاج 49 أو 50 قالب كاتو أسبوعياً.

الحل :نلاحظ أن احتمالات تحقق المبيعات محسوبة من الجدول

حيث P(D1)=0.06+0.15=0.21

وp(D2)=0.27 وp(D3)=0.32+0.2=0.52

نشكل مصفوفة الأرباح والخسائر

2300	2300	2300
2275	2350	2350
2175	2400	2400
2075	2300	2450
1975	2200	2425

نضرب كل عمود من أعمدة المصفوفة باحتمالات الطلب فتصبح كمايلي:

483	621	1196
477.75	634.5	1222
456.75	648	1248
435.75	621	1274
414.75	594	1261

تحديد المنفعة المتوقعة من كل خطة :

المنفعة من الخطة الأولى=483+621+1196=2300

المنفعة من الخطة الثانية=2334.25

المنفعة من الخطة الثالثة =456.75+648+1248=2352.75

المنفعة من الخطة الرابعة=435.75+621+1274=2330.75

المنفعة من الخطة الخامسة=2269.75

ونجد أن الخطة الثالثة تحقق أكبر منفعة لذا نقترح عليه أن يعتمدها وينتج 48 قالب أسبوعيا.