رئيس الشعبة الإدارية

الفصل الأول
المتواليات العددية

§1. تمهيد و تعاريف:

لنتأمل مجموعات الأعداد المتتالية المرتبة وفق نظام معين:

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

إن هذه الأعداد تتوالى عدداً بعد آخر، وكل عدد يزيد بواحد عن العدد الذي يسبقه بينما مجموعة الأعداد التالية:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

فيها حاصل قسمة كل عدد على العدد الذي يسبقه يساوي $\frac{1}{2}$. وأخيراً المجموعة :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

في هذه المجموعة المقام يزيد بمقدار واحد في كل عدد عن العدد الذي يسبقه.

كل من أعداد هذه المجموعات تسمى متوالية أعداد نظراً لوجود علاقة ثابتة بين كل عدد والعدد الذي يليه بالترتيب.

1ـ1ـ تعريف متوالية الأعداد:

تعرّف متوالية الأعداد بأنها تابع معرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية N ونرمز لقيم هذا التابع بـ $f(n) = a_n$، حيث تسمى حدود المتوالية، ونسمي العدد n برقم الحد a_n.

نكتب المتوالية بالشكل: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$

أو بشكل مختصر: $\{a_n\} \quad , \quad n \in N$.

يسمى العدد a_1 بالحد الأول للمتوالية والعدد a_2 بالحد الثاني للمتوالية، والعدد a_n بالحد العام للمتواليه (الحد النوني).

أمثلة على المتواليات:

1- المتوالية: $1, 2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots$ حدها العام $a_n = n$

2- المتوالية: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\ldots\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n=\frac{1}{2^n}$

3- المتوالية: $-1,+1,-1,\ldots\ldots\ldots,+1,-1,\ldots\ldots$ حدها العام $a_n=(-1)^n$

4- المتوالية: $2,2,2,\ldots\ldots\ldots,2,\ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n=2$

المتوالية الأخيرة تعتبر مثالاً على المتوالية الثابتة.

مثـــال:

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتوالية التي حدها العام: $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

الحـــل: بأخذ $n=1,2,3,4$ على التوالي نجد أن:

$$a_1=\frac{1}{2^0}=1,\ a_2=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},a_4=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وتكون المتوالية المطلوبة هي:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$$

مثـــال:

أوجد الحد العام للمتوالية:

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25}$$

الحـــل: يمكن كتابة حدود المتوالية كما يلي:

$$a_1=\frac{1}{1^2},\ a_2=\frac{1}{2^2},a_3=\frac{1}{3^2},a_4=\frac{1}{4^2}$$

نستنتج أن الحد العام هو: $a_n=\frac{1}{n^2}$

- إذا حدد في متوالية الحد الأخير سميت متوالية منتهية، وعندما يكون عدد حـــدودها غير منتهِ سميت المتوالية غير منتهية.

1ــ 2ــ تعريف المتوالية المحدودة:

نسمي المتوالية $\{a_n\}$ محدودة إذا وجد عدد موجب M بحيث أنه من أجـــل أي $n\in N$ فإن المتراجحة: $|a_n|\leq M$ محققة.

وفي الحالة المعاكسة تسمى المتوالية غير محدودة.

مثـــال: المتواليتان $a_n = \frac{1}{n^4}$, $a_n = (-1)^n$ محدودتان.

لأن المتوالية الأولى: $0 \le \frac{1}{n^4} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{n^4}\right| \le 1$

وكذلك المتوالية الثانية: $-1 \le (-1)^n \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|(-1)^n\right| \le 1$

3-1 ــ تعريف المتوالية المتزايدة:

نسمي المتوالية $\{a_n\}$ متزايدة إذا كان مـــن أجـــل أي عـــدد $n \in N$ تكـــون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} > a_n$.

وتسمى المتوالية $\{a_n\}$ متناقصة، إذا كان من أجـــل أي عـــدد $n \in N$ تكـــون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} < a_n$.

مثـــال:

بيّن أن المتوالية: $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots \;;\; a_n = \frac{n}{n+1}$ متزايدة.

الحـــل: لأجل ذلك يجب أن نبرهن أنه من أجل كل عدد $n \in N$ فإن المتراجحة:

$a_{n+1} - a_n > 0$ أو $a_{n+1} > a_n$ محققة.

بالفعل هذا محقق فبعد تبديل كل n بـــ $n+1$ وإجراء الطرح نجد أن:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} > 0$$

مثـــال: المتوالية $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots$ متناقصة لأن:

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ مهما كانت قيمة n . وبالتالي فإن $a_{n+1} < a_n$ متوالية متناقصة.

1 ــ4 ــ تعريف نهاية متوالية:

لتكن $\{a_n\}$ متوالية ما ، نقول عنها أنها متقاربة ونهايتها L. ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

عندما تتقارب حدودها من L من أجل قيم n كبيرة بقدر كاف، وإذا لـــم تكـــن المتوالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثـــال: حدد فيما إذا كانت المتوالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متقاربة أم متباعدة.

الحـــل: إن حدود المتوالية:$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\ldots\ldots$. تدنو من العدد $L=0$ عنـــدما تأخذ n قيماً أكبر فأكبر.

إذن المتوالية متقاربة $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

مثـــال:

تنتج شركة شمعات اشتعال محركات، نـــسبة الـــشمعات العاطلـــة منهـــا 2% واحتمال الحصول على شمعة عاطلة واحدة على الأقل في عينة عشوائية مكونة مـــن n شمعة هو: $f(n)=1-(0.98)^n$ والمطلوب:

أوجد الحدود a_5 ، a_{10} ، a_{25} ، a_{100} ، a_{200} من هذه المتوالية واحـــسب $\lim_{n\to\infty} a_n$ وفسرّ الجواب.

الحـــل: لدينا متوالية معرّفة بالعلاقة التالية: $a_n=f(n)=1-(0.98)^n$ وبحساب هذه الحدود وفق العلاقة السابقة نجد أن الحدود المطلوبة هي:

$$a_5=0.10\ ,\ a_{10}=0.18\ ,\ a_{25}=0.40\ ,\ a_{100}=0.87\ ,\ a_{200}=0.98$$

فعلى سبيل المثال احتمال الحصول على شمعة اشتعال عاطلة على الأقـــل فـــي عينة عشوائية مكونة من 25 شمعة 0.4 أي 40%. لحساب $\lim_{n\to\infty} a_n$ نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-(0.98)^n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}(0.98)^n = 1-0=1$$

ويفسّر الجواب كالآتي، إذا كان حجم العينة كبيراً بقدر كاف فإنها تحوي علـــى شمعة عاطلة واحدة على الأقل.

سنقتصر في دراستنا في هذا الفصل على المتواليـــات الحـــسابية والمتواليـــات الهندسية. وللمتواليات تطبيقات عديدة منها في مجال حساب القيمة الحالية للقـــروض، وإيجاد أقساط الدفعات المالية.

§.2 المتوالية الحسابية:

المتوالية الحسابية هي متوالية أعداد ينتج كل حد من حدودها، بدءاً مـــن الحـــد الثاني بعد إضافة مقدار ثابت (موجب أو سالب) للمقدار السابق لـــه، يـــسمى المقـــدار

الثابت الذي يضاف لأي حد من حدودها بأساس المتوالية الحسابية ونرمز له بالحرف d كما نرمز للحد الأول منها بالرمز a.

تسمى المتوالية الحسابية متزايدة إذا كان كل حد من حدودها أكبر من الحد الذي يسبقه (أي أنه إذا كان $d > 0$). ونسمي المتوالية الحسابية متناقصة إذا كان أي حد فيها أقل من الحد السابق له (أي أنه إذا كان $d < 0$).

2 ــ 1ــ قانون الحد العام للمتوالية الحسابية:

إن أي حد من حدود متوالية حسابية يساوي إلى حدها الأول $a = a_1$ مضافاً إليه عدد الحدود السابقة له مضروباً بأساس المتوالية d ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالقانون:

$$a_n = a + (n-1)d \quad , \quad n \in N$$

يعطى أساس المتوالية الحسابية بالعلاقة :

$$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$$

- كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحدين المتساويان البعد عنه، أي أن:

$$a_k = \frac{a_{k-n} + a_{k+n}}{2} \, , \; k \in N \, , \; n \in N \, , \; k - n > 0$$

- في كل متوالية حسابية يكون فيها : $a_K + a_\ell = a_n + a_m$ بشرط: $k + \ell = n + m$
- إن كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحدين السابق واللاحق له، أي أن: $a_K = \dfrac{a_{K-1} + a_{K+1}}{2}$

2ــ2 ــ مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الحسابية:

لتكن لدينا المتوالية الحسابية التالية:

$$a_1 = a \, , \, a_2 = a + d \, , \, a_3 = a + 2d , \cdots\cdots\cdots , \, a_n = a + (n-1)d$$

ونرمز لمجموعها بـ S_n فنكتب:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots\cdots + a + (n-1)d$$

هذا المجموع يمكن كتابة على الشكل التالي وذلك بإعادة ترتيبه بالعكس :

$$S_n = a + (n-1)d + \cdots\cdots\cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

بجمع كل حدين متقابلين بالترتيب من المجموعين السابقين نحصل على:

$$2S_n = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\cdots\cdots+[2a+(n-1)d]$$

إن عدد الحدود في هذا المجموع n حد وبالتالي يكون:

$$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

ومنه:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

وهذه العلاقة تمثل مجموع الحدود الـــ n الأولى لمتوالية حسابية.

كما يمكن كتابة العلاقة السابقة بدلالة الحد الأخير بالشكل التالي:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[a+a_n]}$$

من خلال العلاقة الأخيرة يمكننا حساب مجموع متوالية حسابية بمعرفة حـــديها الأول والأخير وعدد حدودها.

- اعتماداً على قانون الاستقراء الرياضي يمكن إثبات أن مجموع أعداد طبيعية متماثلة الأس:

$$1+2+3+\dots\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

أمثلة على المتواليات الحسابية:

مثال:

أوجد عدد الحدود ومجموع متوالية حسابية حـــدها الأول 0 وأساســـها $d=\frac{1}{2}$ وحدها الأخير يساوي 5.

الحـــل: من نص المسألة نجد أن: $a=0 \quad , \quad d=\frac{1}{2} \quad , \quad a_n=5$

باستخدام العلاقة: $a_n = a+(n-1)d$

نجد:

$$n-1=\frac{a_n-a}{d}$$

$$n=\frac{a_n-a}{d}+1$$

$$n=\frac{5-0}{\frac{1}{2}}+1=10+1=11$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n)=\frac{11}{2}(0+5)=\frac{55}{2}=27.5$$

مثـــال:

أوجد الحد الأول والأساس وعدد الحـــدود لمتواليـــة حـــسابية حـــدها الأخيـــر $a_n=55$ و $S_{15}=412.5$ و $a_2+a_5=32.5$.

الحـــل:

انطلاقاً من:

$$a_2+a_5=32.5$$

$$(a+d)+(a+4d)=32.5$$

$$2a+5d=32.5 \qquad (1)$$

ومن الفرض نجد أن:

$$S_{15}=412.5$$

$$\frac{15}{2}(a+a_{15})=412.5$$

$$15a+105d=412.5 \qquad (2)$$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) نحصل على: $a=10\ ,\ d=2.5$

وبالتعويض في العلاقة:

$n=\frac{a_n-a}{d}+1$ نجد أن: $n=\frac{55-10}{2.5}+1=19$

مثـــال: إذا كانت العلاوة السنوية لراتب مدير مصنع هي 600 ل.س، وكان راتبه في آخر سنة عمل بها في المصنع قد بلغ 3300 ل.س وإجمالي دخله طوال فترة عمله في هذه الوظيفة هو 10500 ل.س. و**المطلوب:**

احسب قيمة الراتب لمدير المصنع عند بداية التعيين وعدد سنوات الخدمة.

الحـــل:

بفرض أن مقدار الراتب عند بداية التعين هي a، ومقدار الزيادة الـسنوية هـــي $d = 600$ ، فإن الراتب في السنة الثانية سيكون $a + 600$ والراتب في السنة الأخيرة هو 3300 ل.س وهو يمثل الحد الأخير مـــن متواليـــة حـــسابية متزايـــدة أساســـها $d = 600 > 0$.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$3300 = \mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)600 \qquad (1)$$

وإن مجموع ما يتقاضاه يمثل مجموع حدود متوالية حسابية:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$10500 = \frac{\mathrm{n}}{2}[2\mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)600] \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن: $a = 3900 - 600n$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$10500 = \frac{n}{2}[2(3900 - 600n) + (n-1)600]$$

بعد الإصلاح نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بـــالمتحول n وهـــي مـــن الشكل:

$$n^2 - 12n + 35 = 0$$

$$(n-7)\cdot(n-5) = 0$$

ومنه نجد أن $n = 7$ أو $n = 5$

من أجل $n = 7$ تكون قيمة $a = -300$ مرفوضة.

ومن أجل $n = 5$ تكون قيمة $a = 900$ مقبولة.

ومعنى ذلك أن مدة الخدمة هي 5 سنوات ومقدار الراتب عنـــد بدايـــة التعـــين هو 900 ل.س.

مثـــال: أودع محمد مبلغ 1000 ل.س بفائدة بسيطة شهرية % 1 في أحد المـــصارف. احسب رصيده في نهاية سنة من تاريخ الإيداع.

الحـل: إن المبلغ المودع في بداية السنة وقدره 1000 ل.س يمثل الحد الأول لمتوالية حسابية، حدود هذه المتوالية هي:

$$1000\ ,\ 1010\ ,\ 1020\ ,\ 1030\ ,\ 1040\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

نرى أن أساسها هو $d = 10$. لحساب الرصيد في نهاية السنة نوجد الحد a_{12}:

$$a_{12} = a + (n-1)\cdot d$$
$$= 1000 + (12-1)10 = 1110\ \ s\cdot p$$

3.§ المتوالية الهندسية:

المتوالية الهندسية هي متوالية أعداد، كل حد من حدودها بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد السابق له مضروباً بمقدار ثابت (موجب أو سالب)، نسمي المقدار الثابت بأساس المتوالية الهندسية ونرمز له بالرمز r ، ونرمز للحد الأول فيها بالحرف a.

يحسب أساس المتوالية الهندسية من العلاقة: $r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\ \ ,\ n \geq 1$

فمثلا المتوالية: $20\ ,\ 10\ ,\ 5\ ,\ \dfrac{5}{2}\ ,\ \cdots\cdots\cdots$

هي متوالية هندسية أساسها $r = \dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $a = 20$

يعطى الشكل العام لمتوالية هندسية حدها الأول a وأساسها r وعدد حدودها n بالشكل الآتي:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\cdots\cdots\cdots,\ a\cdot r^{n-1}$$

3ـ1ـ قانون الحد العام للمتوالية الهندسية:

كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد الأول a مضروباً بأساس المتوالية r المرفوع إلى قوة تساوي إلى عدد الحدود السابقة لذلك الحد. أي أن: $a_n = a\cdot r^{n-1}$

- مربع كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي جداء الحدين المتساويين في البعد عنه أي: $a_k^2 = a_{k-n}\ .\ a_{k+n}$
- في كل متوالية هندسية تكون المساواة: $a_k\ .\ a_\ell = a_n\ .\ a_m$ محققة بشرط:

$$k + \ell = n + m$$

- مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

3ـ2ـ مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\cdots\cdots\cdots,\ a\cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots\cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بـ r:

$$r\cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots\cdots + ar^n \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

ومنه: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ بشرط : $r \neq 1$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد $(r=1)$ فإن المتوالية تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \cdots\cdots\cdots, a$ ويكون مجموعها $n\cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r\cdot a_n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

3ـ3ـ المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{a_n\}$ متوالية هندسية لانهائية إذا كان أساسها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|r| < 1$ وبملاحظة أن: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}\,(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

أمثـلة على المتواليات الهندسية:

مثـــال: أوجد مجموع الحدود الـــ 12 الأولى للمتوالية الهندسية: $4, -8, 16, -32$

الحـــل: لدينا $a=4$ ، $r=-2$ ، $n=12$

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

$$S_{12} = \frac{4\left(1-(-2)^{12}\right)}{1-(-2)} = -5460$$

مثـــال: أوجد الحد الأول ومجموع الحدود العشرة الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a_{10}=7 \ , \ n=10 \ , \ r=\frac{1}{2}$$

الحـــل: انطلاقاً من العلاقة: $a_{10}=ar^9 \quad \Rightarrow \quad a_n = ar^{n-1}$

$$a=\frac{a_{10}}{r^9}=\frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9}=7.(2)^9=3584$$

ومنه بالتعويض نجد:

$$S_{10}=\frac{3584\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=7161$$

مثـــال:

متوالية هندسية مؤلفة من (6) حدود، مجموع الحدود الثلاثـــة الأولـــى منهـــا يساوي 168 ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة يساوي 21. أوجد حدود هذه المتوالية.

الحـــل:

$$a_1+a_2+a_3=168$$
$$a_4+a_5+a_6=21$$

أو يمكن كتابتها حسب تعريف المتوالية الهندسية بالشكل التالي:

$$a+ar+ar^2=168$$
$$ar^3+ar^4+ar^5=21$$

أو

$$a\left(1+r+r^2\right)=168 \qquad (1)$$

$$ar^3\left(1+r+r^2\right)=21 \qquad (2)$$

بتقسيم (2) على (1) نحصل على:

$$r^3=\frac{21}{168}=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{2}$$

وبتعويض قيمة $r=\frac{1}{2}$ في المعادلة (1) نحصل على قيمة $a=96$.

والمتوالية المطلوبة هي: 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96

مثـــال:

عبّر عن الكسر العشري المتكرر: $0.232323\cdots\cdots$ بصورة كسر عادي.

الحـــل:

بحسب التمثيل العشري نستطيع كتابة الرقم $0.232323\cdots\cdots$ بالشكل التالي:

$$0.\dot{2}32323\cdots\cdots=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{23}{100}+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots$$

وهذا المجموع يمثل متوالية هندسية لانهائية حـــدها الأول $a=\frac{23}{100}$ وأساســـها $\frac{1}{100}$ ويكون مجموعها S_∞

$$S_\infty=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{100}\left(\frac{100}{99}\right)=\frac{23}{99}$$

إذن $$0.232323\cdots\cdots=\frac{23}{99}$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتواليات الآتية:

1) $a_n = 2^{n-1}$

2) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

3) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$

4) $a_n = \dfrac{e^n}{n^3}$

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n!}$

2- أوجد الحد العام لكل من المتواليات الآتية:

$$1\,,4\,,7\,,10\,,\ldots\ldots$$

$$1\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{27}\,,\frac{1}{81}\,,\ldots\ldots$$

$$2\,,\frac{8}{5}\,,\frac{32}{25}\,,\frac{128}{125}\,,\ldots\ldots$$

$$1\,,l\,,\frac{l^2}{2}\,,\frac{l^3}{6}\,,\frac{l^4}{24}\,,\ldots\ldots$$

3- إذا علمت أن الحد رقم (21) والحد رقم (35) لمتوالية حسابية هما (64) و (106) على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الجواب: $4\,,7\,,10$

4- إذا علمت أن الحد الخامس والحد السابع لمتوالية هندسية هما: 324 و 2916 على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الجواب: $4\,,12\,,36 \quad if \quad r=3 \qquad 4\,,-12\,,36 \quad if \quad r=-3$

5 - احسب مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية: $1\,,-\dfrac{1}{4}\,,\dfrac{1}{16}\,,-\dfrac{1}{64}\,,\ldots\ldots\ldots$

الجواب: $S_\infty = \dfrac{4}{5}$

6- أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتوالية المعرّفة بالشكل: $a_n = 3(a_{n-1} + 2)$

حيث: $a_1 = a = 1$.

الجواب: $1 , 9 , 33 , 105 , 321$

7- إذا كانت : $2 , x , y , 17$ متوالية حسابية، فأوجد قيم y , x .

الجواب: $x = 7 ,\ y = 12$

8- إذا كان مجموع ثلاثة حدود متعاقبة في متوالية حسابية تساوي 15 وجداؤهم يساوي 80 فأوجد الحدود الثلاثة. (توجيه : أرمز للحد الأوسط بـ y).

الجواب: $8 , 5 , 2$ أو $2 , 5 , 8$

9- إذا علمت أن الحد الثالث في متوالية هندسية يساوي $\frac{63}{4}$ والحد السادس منها يساوي $\frac{1701}{32}$ فأوجد الحد الخامس فيها.

الجواب: $a_5 = \frac{567}{16}$

10- لدينا متوالية حسابية حدها الأول 5 والحد الـ (50) فيها يساوي (103)، كم حداً يجب أن نضيف إليها ليصبح مجموعها (572).

الجواب: $n = 22$

11 - إذا كانت الأعداد a,b,c تشكل متوالية هندسية، أثبت أن الأعداد:

$\frac{1}{\log_a N} , \frac{1}{\log_b N} , \frac{1}{\log_c N}$ تشكل متوالية حسابية.

12- احسب جداء الأعداد : $10^{\frac{1}{10}} , 10^{\frac{2}{10}} , 10^{\frac{2}{10}} , \cdots\cdots\cdots , 10^{\frac{19}{10}}$.

الجواب: 10^{19}

13- اكتب الكسر العشري المتكرر $0.22222 \cdots\cdots\cdots$ بصورة كسر عادي.

الجواب: $\frac{2}{9}$

14- أوجد مجموع الحدود الـ 19 الأولى لمتوالية حسابية فيها:

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$$

الجواب: 1064

15– أوجد مجموع كل الأعداد ثلاثية الأرقام ومن مضاعفات العدد خمسة.

الجواب: 98550

16 – متوالية حسابية فيها:

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$$
$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 12.5$$

أوجد حدها الأول وأساسها.

الجواب: $a_1 = 0.5 \quad , \quad d = 0.5$

17– لدينا متوالية هندسية فيها:

$$a_1 + a_3 + a_5 + ... = \frac{16}{3}$$
$$a_2 + a_4 + a_6 + ... = \frac{4}{3}$$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

الجواب: $5 \, , \frac{5}{4} , \frac{5}{16}$

الفصل الثاني

الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

§1. مقدمة وتعاريف:

تأتي أهمية استخدام معدل (سعر) الفائدة كأداة من أدوات السياسة الاقتصادية، حيث أن الطلب على الاستثمار يتعلق بسعر الفائدة، فإذا كان سعر الفائدة منخفضاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون كبيراً مما يؤدي إلى زيادة النشاط الإنتاجي، وبالعكس إذا كان سعر الفائدة مرتفعاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون قليلاً وهذا سيؤدي إلى قلة النشاط الإنتاجي.

يلعب سعر الفائدة دوراً كبيراً في تحقيق الاستقرار والنمو الاقتصاديين وتحفيز الاستثمار كما يربط سعر الفائدة بين سوق السلع والخدمات وسوق النقد.

إن الفائدة هي التكلفة التي تتحملها المنشآت الاقتصادية بأنواعها المختلفة الصناعية والتجارية لقاء الحصول على رأس المال، فالفائدة عملياً هي تكلفة رأس المال.

تقسم الفائدة إلى نوعين هما: الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، تستخدم الفائدة البسيطة في حالة الاستثمارات والقروض قصيرة الأجل التي مدتها سنة واحدة فما دون، بينما تطبق الفائدة المركبة في حالة الاستثمارات والقروض طويلة الأجل مدتها الزمنية أكثر من سنة.

وللفائدة المركبة تطبيقات كثيرة في المجالات الاقتصادية كمسائل الإنتاج والاستثمار، وفي مختلف المجالات العلمية والاجتماعية والسكانية.

يتحدد سعر الفائدة تبعاً لعوامل عدة منها عرض النقود وطلبها والتضخم النقدي.

1-1- تعريف الفائدة البسيطة:

هي العائد أو التعويض المادي الناتج عن استثمار أو اقتراض أموال الغير خلال فترة زمنية معنية، نسمي المبلغ المقترض بالأصل، وتحسب الفائدة كنسبة مئوية سنوية

من الأصل دائماً طوال فترة استخدام القرض، أي أن الفوائد المخصصة لا تضاف إلى أصل المبلغ.

تحتوي معادلة الفائدة البسيطة على ثلاث مركبات:

1- الأصل (المبلغ المقترض أو المبلغ المستثمر) ونرمز له بـــ C.

2- معدل أو سعر الفائدة وتقدر بالسنوات (نسبة مئوية في السنة) ونرمز له بـــ i.

3- دورة الاستثمار أو الاقتراض ونرمز لها بـــ n.

وتعطى معادلة الفائدة البسيطة بالعلاقة: $C_n = C(1 + i \cdot n)$

حيث أن C_n جملة المبلغ بعد n سنة وتسمى (القيمة المستقبلية للمبلغ C).

مثـــال:

اقترض شخص من أحد المصارف مبلغاً من المال مقداره 1000 ل.س بمعدل فائدة بسيطة % 5 سنوياً. أوجد القيمة المستقبلية للمبلغ وذلك:

1- بعد عامين.

2- بعد ثلاثة اشهر.

3- بعد 180 يوم.

الحـــل:

1) من المعلومات المعطاة: $C = 1000$ ، $i = 0.05$ ، $n = 2$

ومن معادلة الفائدة البسيطة: $C_n = C(1 + i \cdot n)$

$$C_2 = 1000[1 + (0.05) \cdot (2)] = 1000(1.1) = 1100 \ S \cdot P$$

2) إن ثلاثة شهور تمثل ربع عام إذن: $n = \frac{3}{12} = 0.25$

$$C_{0.25} = 1000[1 + (0.05) \cdot (0.25)] = 1000(1.0125) = 1012.5 \ S \cdot P$$

3) في معظم المعاملات المالية يعتبر العام 360 يوماً ومنه: $n = \frac{180}{360} = 0.5$

$$C_{0.5} = 1000[1 + (0.05) \cdot (0.5)] = 1000(1.025) = 1025 \ S \cdot P$$

1-2- تعريف الفائدة المركبة:

هي الفائدة التي تضاف إلى الأصل (المبلغ الأصلي) في نهاية كل وحدة زمن معينة وتستثمر معه لتشكل أصلاً جديداً (رأسمالاً جديداً) للدورة الزمنية التالية تحـــسب

عليه الفائدة من جديد. بمعنى أنه في الدورة الزمنية الجديدة تحسب فائدة على أصل المبلغ وفائدة على فائدة أصل المبلغ في الدورة الزمنية السابقة. هنا الأصل (المبلغ الأصلي) متغير دائماً، حيث تحسب الفائدة في كل دورة زمنية على جملة المبلغ في الدورة الزمنية السابقة.

- **معدل الفائدة:**

هو فائدة وحدة نقدية واحدة (ليرة واحدة) في نهاية كل دورة زمنية (سنة مثلاً) ويرمز لمعدل الفائدة بالرمز i ويعبر عنه بالشكل i %.

1ـ3ـ معادلة الفائدة المركبة:

إذا فرضنا أن شخصاً أودع مبلغ C ل.س في أحد المصارف لمدة n من السنوات بفائدة معدلها i % سنوياً فتكون الفائدة المستحقة على المبلغ C في نهاية السنة الأولى أي عندما $n=1$: $I_1 = C.i.n = C.i$

وجملة المبلغ C في نهاية السنة الأولى C_1 :

$$C_1 = C + Ci = C(1+i)$$

وهي تمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثانية، وإذا ترك المبلغ لمدة سنة ثانية ولم يسحب هذا الشخص فوائد السنة الأولى بل تركها تضاف لأصل المبلغ في نفس الحساب، في هذه الحالة ستحسب الفائدة على الأصل الجديد وهو $C(1+i)$

وستكون الفائدة هي: $I_2 = C_1 \cdot i = C(1+i)\cdot i$

وجملة المبلغ C_1 في نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = C_1 + I_2 = C(1+i) + C(1+i)\cdot i$$

وبإخراج $C(1+i)$ عامل مشترك نجد:

$$= C(1+i)\cdot(1+i) = C(1+i)^2$$

وهذا الأخير يمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثالثة.

وبالاستمرار بهذه الطريقة ستكون جملة المبلغ في نهاية السنة الثالثة هي:

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2(1+i) = C(1+i)^3$$

بشكل عام جملة مبلغ C ل.س (القيمة المستقبلية لمبلغ C) مستثمر بفائدة مركبة i % سنوياً لمدة n من السنوات ستكون:

$$C_n = C(1+i)^n$$

إن مقدار الفائدة المستحقة عن مبلغ C لمدة n من السنوات تحسب من العلاقة:

$$I = C_n - C = C(1+i)^n - C$$

$$I = C\,[(1+i)^n - 1]$$

مثـال:

أوجد جملة مبلغ (القيمة المستقبلية) 500 ل.س مستثمر بمعدل فائدة 12 % سنوياً.

1- بعد شهر.

2- بعد سنة.

3- بعد خمس سنوات.

وذلك في حالة الفائدة البسيطة وفي حالة الفائدة المركبة.

الحـل:

- **في حالة الفائدة البسيطة نستخدم القانون:** $C_n = C(1+i\cdot n)$

1- جملة المبلغ بعد شهر هي:

$$C_n = 500\left(1+0.12\times\frac{1}{12}\right) = 505 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة هي:

$$C_1 = 500(1+0.12(1)) = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1+0.12(5)) = 800 \quad S.p$$

- **في حالة الفائدة المركبة نستخدم القانون:** $C_n = C(1+i)^n$

1- جملة المبلغ بعد شهر على أساس معدل فائدة مركبة هي:

$$C_n = 500(1+0.12)^{\frac{1}{12}} = 500(1.12)^{0.085}$$
$$= 500(1.0094507) = 504.72 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة على أساس الفائدة المركبة هي:

$$C_1 = 500(1+0.12)^1 = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1+0.12)^5 = 500(1.12)^5$$
$$= 500(1.7623417) = 881.170 \quad S.p$$

بمقارنة جملة المبلغ في حالتي الفائدة البسيطة والفائدة المركبة نلاحظ أن الجملة في حالة الفائدة البسيطة أكبر من الجملة في حالة الفائدة المركبة عندما تكون المدة n أقل من سنة وتتساوى الجملتان عندما تكون المدة سنة واحدة $(n=1)$، وتكون الجملة في حالة الفائدة المركبة أكبر من الجملة في حالة الفائدة البسيطة عندما $n>1$ (أي عندما تكون المدة n أكبر من سنة).

مثـــال:

استثمر شخص مبلغاً من المال قدره 000 100 ل.س في مصرف يمنح فائدة مركبة معدلها % 4 سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية المدة وجد أن جملة ما تكوّن له 148024.43 ل.س، احسب مدة استثمار هذا المبلغ.

الحــل: نعلم أن: $C_n = 148024.43\,,\quad i = 0.04\,,\; C = 100000$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

بالتعويض نجد: $148024.43 = 100\,000(1+0.04)^n$

ومنه: $$(1.04)^n = \frac{14804.43}{100000} = 1.4802443$$

نأخذ لغاريتم الطرفين: $\ln(1.04)^n = \ln(1.4802443)$

وحسب خواص اللغاريتم نجد: $n \cdot \ln(1.04) = \ln(1.4802443)$

$$n = \frac{\ln(1.4802443)}{\ln(1.04)} = \frac{0.39220714}{0.039220713} = 10$$

إذن مدة الاستثمار هي عشر سنوات.

مثـــال:

أوجد معدل الفائدة المركبة إذا كانت جملة المبلغ 55839.478 ل.س بعد 10 سنوات هي 000 100 ل.س.

الحــل: نعلم أن: $n = 10$ ، $C_{10} = 100000$ ، $C = 55839.478$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

$$100000 = 55839.478(1+i)^{10}$$

$$\frac{100000}{55839.478} = (1+i)^{10} \quad \Rightarrow \quad 1.790847686 = (1+i)^{10}$$

$$(1+i) = (1.790847686)^{\frac{1}{10}} = (1.790847686)^{0.1} = 1.06$$

$$i = 1.06 - 1 = 0.06$$

إذن معدل الفائدة المركبة هو % 6 سنوياً.

مثـــال:

مبلغ من المال قدره C ل.س نرغب في استثماره بمعدل فائـدة مركبـة % 4 سنوياً لتكوين مبلغ 000 100 ل.س بعد 6 سنوات لتغطية نفقات السكن. فما قيمة المبلغ C.

الحـل: نعلم أن: $n = 6 \ , \ i = 0.04 \ , \ C_6 = 100000$

ومن معادلة الفائدة المركبة نجد أن: $C_n = C(1+i)^n \quad \Rightarrow \quad C = C_n(1+i)^{-n}$

$$C = 100000(1+0.04)^{-6} = 100000(1.04)^{-6}$$

$$C = 100000(0.79032) = 79031.5 \quad S.p$$

1ـ4ـ جملة مبلغ عندما تكون مدة الاستثمار مقدّرة بالسنوات والأشهر والأيام:

إذا كانت مدة الاستثمار مقدرة بالسنوات والأشهر (أي عدداً صحيحاً وكسراً).

لنفترض أن الفترة الزمنية هي n سنة و $\frac{\alpha}{\beta}$ في السنة ($\alpha < \beta$)، لحساب جملة المبلغ في نهاية الفترة الزمنية ($n + \frac{\alpha}{\beta}$) نستخدم إحدى الطريقتين:

1- نحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية n على أساس الفائدة المركبة، أما الفترة الزمنية ($\frac{\alpha}{\beta}$) فتحسب على أساس الفائدة البسيطة وتسمى هذه الطريقة بالطريقة الحقيقية. وتحسب من العلاقة: $C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^n \cdot (1 + \frac{\alpha}{\beta} \cdot i)$

2- نحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية $\frac{\alpha}{\beta}$ على أساس الفائدة المركبة، وتسمى هذه الطريقة بالطريقة التجارية وتحسب من العلاقة:

$$C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^{n+\frac{\alpha}{\beta}}$$

مثـــال:

احسب جملة مبلغ 000 10 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها % 6.3 سنويا ولمدة 5 سنوات وثلاثة شهور.

الحـــل: من نص المسألة لدينا: $n=5\ ,\quad C=10000\ ,\quad i=0.063$

طريقة أولى:

يُحسب العدد الصحيح من سنوات مدة الاستثمار بقانون الفائدة المركبـة، أمـا العدد غير الصحيح لمدة الاستثمار (الأشهر) فيُحسب علـى أسـاس قـانون الفائـدة البسيطة:

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^5\left[1+(0.063)\left(\frac{3}{12}\right)\right] \\ &= 10000(1.063)^5\left[1+(0.063)\cdot(0.25)\right] \\ &= 10000(1.3572702)(1+0.01575) = 13786.47 \quad \text{S.p} \end{aligned}$$

طريقة ثانية:

تحسب كامل مدة الاستثمار على أساس الفائدة المركبة والأشهر بـأجزاء مـن السنة.

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^{5+\frac{3}{12}} = 10000(1.063)^{5.25} \\ &= 10000(1.37816) = 13781.6 \quad S.p \end{aligned}$$

1ــ5ــ جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة مركبـة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة:

عند استثمار (اقتراض) مبلغ من المال قدره P ل.س لمدة n مـن الـسنوات بفائدة مركبة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات في السنة فإن m تأخذ القيم الآتية:

$m=1$: الفائدة تضاف مرة واحدة في السنة الكاملة (الفائدة سنوية).

$m=2$: الفائدة تضاف مرتان في السنة (الفائدة نصف سنوية).

$m=3$: الفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة (الفائدة $\frac{1}{3}$ سنوية).

$m=4$: الفائدة تضاف أربع مرات في السنة (الفائدة فصلية أو ربع سنوية).

$m = 12$: الفائدة تضاف 12 مرة في السنة (الفائدة شهرية).

$m = 365$: الفائدة تضاف 365 مرة في السنة.

تعطى جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر n من السنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة بالصيغة الآتية:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

حيث:

Cــ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر أو المقترض.

i ــ معدل الفائدة السنوية الذي يضاف m مرة في السنة.

mــ عدد فترات التركيب (عدد مرات إضافة الفائدة) في السنة الواحدة.

nــ عدد سنوات مدة الاستثمار (مدة الاقتراض).

إن: $\frac{i}{m}$ يمثل معدل الفائدة لفترة إضافة الفائدة (معدل الفائدة الجزئي).

مثـــال:

أوجد القيمة المستقبلية (جملة) لمبلغ 1000 ل.س مستثمر لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية 8 % تضاف:

1- مرة واحدة في السنة (الفائدة سنوية).

2- مرتان في السنة (نصف سنوية).

3- أربع مرات في السنة (فصلية).

4- 12 مرة في السنة (شهرية).

الحل: لدينا: $n = 3 \quad , m = 1 \quad , \; i = 0.08, \quad C = 1000$

1- باستخدام المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \Rightarrow \; C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{1}\right)^{(1)(3)} = 1259.71 \quad S.p$$

2- لدينا: $C = 1000 \;\; , i = 0.08 \;, \;\; m = 2 \;, \; n = 3$

$$C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{3}\right)^{(2)(3)} = 1265.32 \quad S.p$$

3- لدينا: $C=1000 \quad , i=0.08 \; , \; m=4 \; , \; n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{(4)(3)}=1268.24 \quad S.p$$

4- لدينا: $C=1000 \quad , \quad i=0.08 \quad , \quad m=12 \quad , \quad n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{(12)(3)}=1271.75 \quad S.p$$

نلاحظ أن جملة المبلغ تزداد أكثر فأكثر كلما زاد عدد مرات إضافة الفائدة في السنة.

لنضع هذه النتائج في الجدول الآتي:

جملة المبلغ	الأصل المستثمر	فترة التركيب	المعدل السنوي للفائدة
$1259.71 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	سنوية $(m=1)$	8%
$1265.32 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	نصف سنوية $(m=2)$	8%
$1268.24 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	فصلية $(m=4)$	8%
$1271.75 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	شهرية $(m=12)$	8%

مثـــال:

ما المبلغ الذي يجب أن تودعه اليوم ولمدة 5 سنوات وبمعـــدل فائـــدة مركبـــة 10 % سنوياً حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور لتحصل علـــى مبلـــغ قـــدره 8000 ل.س.

الحـــل: لدينا: $C_5=8000 \quad , \quad i=0.10 \quad , \quad n=5 \quad , \quad m=4$

باستخدام المعادلة:

$$C_n=C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m.n}$$

$$8000=C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{(4)(5)}=C\,(1+0.025)^{20}$$

ومنه:

$$C=\frac{8000}{(1.025)^{25}}=4882.17 \quad S\cdot P$$

1 ـ6ـ الفائدة المركبة المستمرة طيلة أيام السنة:

لنفرض أن m عدد فترات التركيب في السنة (عدد مرات إضافة الفائـــدة فـــي السنة) يجري باستمرار طيلة أيام السنة (أي أن $m \to \infty$ تقترب أكثــر فــأكثر مــن اللانهاية):

نعيد كتابة المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

بالشكل التالي:

$$C_n = C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

$$\lim_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

لندخل متغيراً جديداً: $u = \frac{m}{i}$. حيــث أن: $u \to \infty$ عنــدما $m \to \infty$،

وبعد التعويض نحصل على:

$$C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{ui}\right]^{n} = C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{in}$$

بما أن:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

ومنه نجد:

$$\lim_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\cdot e^{in}$$

- إن القيمة المستقبلية لمبلغ قدره P ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعــدل فائـــدة مُركبة $i\%$ سنوياً تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة يعطى بالعلاقة:

$$A_n = P\cdot e^{i\cdot n}$$

حيث:

C ـــ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر.

i ـــ معدل الفائدة المركبة السنوية .

n ـــ الزمن بالسنوات.

مثـــال:

أوجد القيمة المستقبلية بعد ثلاث سنوات لمبلغ قدره 1000 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها % 8 سنوياً والفائدة تضاف:

1- بشكل يومي.[1]

2- بشكل مستمر.

(1) **ملاحظة:** يمكن اعتبار عدد أيام السنة العادية 365 يوماً وعدد أيام السنة الكبيسة 366 يوماً وعدد أيام السنة التجارية 360 يوم.

الحل: $C=1000 \ , \ i=0.08 \ , \ m=365 \ , \ n=(365)(3)=1095$

1- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل يومي نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n = p\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \Rightarrow C_3 = 1000\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{1095} \approx 1271.20 \quad S.p$$

2- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل مستمر نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n = pe^{in} \Rightarrow C_3 = 1000e^{(0.08)(3)} \approx 1271.25 \quad S.p$$

§-2- المعدل الحقيقي والمعدل الاسمي للفائدة

المعدل الحقيقي هو المعدل الذي تتساوى مدته مع مدة إضافة الفائدة إلـى رأس المال. و**المعدل الحقيقي السنوي** هو مقدار الفائدة الفعلية التي تعود على وحدة النقـود في نهاية السنة على أساس أن الفائدة المستحقة عن كل فترة تضاف إلـى رأس المـال مجرد استحقاقها وتستثمر بالطريقة نفسها التي يستثمر بها رأس المال الأصلي.

المعدل الاسمي هو المعدل الذي لا تتطابق مدته مع مدة إضافة الفائدة إلى رأس المال. و**المعدل الاسمي السنوي** هو حاصل ضرب المعدل عن الفترة التي هي أقل من السنة في عدد الفترات الموجودة في السنة. فإذا قيل أن معدل الفائدة % 4 عن نـصف السنة فإن المعدل السنوي الاسمي يكون: $4\% \times 2 = 8\%$ ونقـول أن معـدل الفائـدة الاسمي % 8 يدفع على مرتين في السنة.

2_1_ العلاقة بين المعدل الحقيقي السنوي والمعدل الاسمي السنوي للفائدة :

لنفرض أن مبلغاً أصلياً قدره C ل.س استثمر بمعدل فائدة مركبة اسمي j يضاف m من المرات في السنة لنرمز بـ i لمعدل الفائدة الحقيقي السنوي. إن القيمة المستقبلية لمبلغ C ل.س بعد سنة واحدة هي:

$$C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=C\left(1+i\right)$$

نقسم طرفي المساواة على C فنجد:

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i$$

ومنه نجد :

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1$$

من خلال هذه العلاقة يمكننا حساب معدل الفائدة الحقيقي السنوي إذا كان معدل الفائدة المركبة الاسمي معلوماً.

i ـــ معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

j ـــ معدل الفائدة المركبة الاسمي الذي يضاف m مرة في السنة.

m ـــ عدد مرات إضافة الفائدة على المبلغ الأصلي في السنة.

بأخذ الجذر ذي الدليل m لطرفي المساواة :

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i\ \Rightarrow\ \left(1+\frac{j}{m}\right)=\left(1+i\right)^{\frac{1}{m}}\ \Rightarrow\ \frac{j}{m}=\left(1+i\right)^{\frac{1}{m}}-1$$

نجد:

$$j=m\left[\left(1+i\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]$$

من العلاقة الأخيرة يمكننا حساب معدل الفائدة الاسمي السنوي بدلالة معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

مثال:

احسب المعدل الحقيقي السنوي الذي يقابل معدل اسمي سنوي % 8 إذا كانت الفوائد تضاف إلى الأصل:

1- مرة كل سنة.

2- كل ستة شهور.

3- كل ثلاثة شهور .

4- 12 مرة في السنة.

الحـل: لدينا: $j = 8\ \%$ والمطلوب إيجاد: $i = ?$

باستخدام القانون: $i = \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^m - 1$

1- في هذه الحالة نجد أن فترة المعدل الحقيقي هي نفس فترة المعدل الاسمي وهي سنة أي:

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{1}\right)^1 - 1 = 1.08 - 1 = 0.08 = 8\%$$ سنوياً

2- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 2$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^2 - 1 = (1.04)^2 - 1 = 0.0816 = 8.16\ \%$$ سنوياً

3- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 4$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = (1.02)^4 - 1 = 0.08243 = 8.234\ \%$$ سنوياً

4- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 12$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 = (1.0067)^{12} - 1 = 0.08343 = 8.343\ \%$$ سنوياً

جملة المبلغ بعد 3 سنوات	المبلغ الأصلي	المعدل الحقيقي السنوي	فترة إضافة الفائدة	المعدل الاسمي السنوي
$1000(1+0.08)^3 = 1259.71$	1000	8%	سنوية	8%
$1000(1+0.0816)^3 = 1265.32$	1000	8.16%	نصف سنوية	8%
$1000(1+0.08243)^3 = 1268.23$	1000	8.243%	فصلية	8%
$1000(1+0.08343)^3 = 1271.75$	1000	8.343%	شهرية	8%

يتساوى معدل الفائدة الحقيقي السنوي مع معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة مرة واحدة في السنة، ويكون معدل الفائدة الحقيقي السنوي أكبر من معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة أكثر من مرة واحدة في السنة.

مثـــال:

أوجد معدل الفائدة الحقيقي المقابل لمعدل الفائدة السنوي 8 % إذا كانت الفائدة تضاف كل ربع سنة.

الحـــل:

لدينا: $j = 0.08$ ، $m = 4$

$$i = \left(1+\frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = (1+0.02)^4 - 1 = (1.02)^4 - 1$$

$$= 1.08243215 - 1 = 0.08243216 = 8.243216\ \%$$

مثـــال: يعطي أحد المصارف فائدة مركبة معدلها 6.1 % سنوياً تضاف كل ثلاثة أشهر ويعطي مصرف آخر فائدة مركبة معدلها 6 % سنوياً تضاف شهرياً. في أي المصرفين يكون الاستثمار أفضل ؟

الحـــل:

للإجابة على هذا السؤال علينا أن نحسب معدلي الفائدة الحقيقيين السنويين للمصرفين، والمصرف الذي يملك معدل الفائدة الحقيقية السنوية الأكبر يكون الاستثمار فيه أفضل، لأنه يعطي مقدار فائدة أكبر.

معدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الأول i_1 هو:

$$i_1 = (1+\frac{0.061}{4})^4 - 1 = 0.0624096$$

ومنه: $i_1 = 6.24\%$.

ومعدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الثاني i_2 هو:

$$i_2 = (1+\frac{0.06}{12})^{12} - 1 = 0.0616778$$

ومنه: $i_2 = 6.16\%$.

نستنتج أن: $i_1 > i_2$ ويكون الاستثمار أفضل لدى المصرف الأول.

§3. خصم الديون بفائدة مركبة:

من الشائع في المعاملات المالية أن يخصم المقرض الفائدة من المبلغ المقترض مقدماً، فمثلاً إذا اقترض شخص مبلغاً قدره C ل.س من مصرف فيقوم المصرف بخصم الفائدة، وفي نهاية المدة يدفع المقترض للمصرف مبلغ C ل.س. تسمى هذه الطريقة بطريقة الخصم، ويسمى المبلغ المطروح بمقدار الخصم، والمبلغ الذي أخذه المقترض بالقيمة الحالية للقرض.

نسمي الفرق بين القيمة الحالية V_p للقرض والتي تساوي $V_p = V_n(1+i)^{-n}$ والقيمة الاسمية V_n للقرض والتي تساوي $V_n = V_p(1+i)^n$ (القيمة المستقبلية) بالخصم، ونرمز للخصم بالحرف D ، حيث:

$$D = V_n - V_p = V_n - V_n(1+i)^{-n} = V_n[\,1-(1+i)^{-n}\,]$$

3-1- معدل الخصم :

معدل الخصم: هو مقدار الخصم عن مبلغ وحدة نقدية واحدة، وتستحق الدفع بعد سنة واحدة. نعلم أن:

$$D = V_n - V_p \;\Rightarrow\; V_p = V_n - D \;\Rightarrow\; \frac{V_n}{(1+i)^n} = V_n - D$$

- لإيجاد القيمة الحالية لوحدة نقدية واحدة تستحق بعد فترة زمنية قدرها سنة نعوض في العلاقة السابقة كل من: $D = d \quad , \quad n = 1 \quad , \quad V_n = 1$ فنجد أن :

$$\frac{1}{1+i} = 1-d \;\Rightarrow\; d = 1 - \frac{1}{1+i}$$

ومنه

$$d = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} \;\Rightarrow\; \boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

وهو معدل الخصم المركب بدلالة معدل الفائدة المركبة.

- ولنحسب معدل الفائدة المركبة i بدلالة معدل الخصم:

$$d = \frac{i}{1+i} \;\Rightarrow\; d(1+i) = i. \;\Rightarrow\; d + id = i$$

ومنه:

$$d = i - id \;\Rightarrow\; d = i(1-d) \;\Rightarrow\; \boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

- القيمة الحالية بدلالة معدل الخصم المركب d:

$$\frac{1}{1+i}=1-d \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{1+i})^n=(1-d)^n$$

بضرب الطرفين بـــ V_n نجد:

$$\frac{V_n}{(1+i)^n}=V_n(1-d)^n$$

ومنه:

$$\boxed{V_p=V_n(1-d)^n}$$

مثـــال:

احسب معدلات الخصم المقابلة لمعدلات الفائدة 5 % ، 6.2 % سنوياً.

الحـــل: 1-

$$d=\frac{i}{1+i}=\frac{0.05}{1+0.05}=\frac{0.05}{1.05}=0.0476=4.76\%$$

2-

$$d=\frac{0.063}{1+0.062}=0.05838=5.84\%$$

مثـــال:

احسب معدلات الفائدة المقابلة لمعدلات الخصم 1.96 % ، 2.439 %

الحـــل:

باستخدام العلاقة:

$$i=\frac{d}{1-d}$$

$$i=\frac{0.0196}{1-0.0196}=\frac{0.0196}{0.9804}=2\%$$ سنوياً

$$i=\frac{0.02439}{1-0.02439}=\frac{0.0249}{0.97561}=2.5\ \%$$ سنوياً

مثـــال:

سند قيمته الاسمية 60000 ل.س ويستحق الدفع بعد 15 عاماً من الآن، فـــإذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 7% سنوياً. ما مقدار الخصم؟

الحـــل: لدينا: $n=15$ ، $i=0.07$ ، $V_{15}=60000$

باستخدام قانون الخصم:

$$D=V_n[1-(1+i)^{-n}]=60000[1-(1+0.07)^{-15}]$$
$$=60000[1-(1.07)^{-15}]=38253.23 \qquad S.p$$

§4. تسوية الديون بفائدة مركبة

إن تسوية الديون تعني سداد الديون في غير موعد استحقاقها، فإذا تأجل سداد الدين مدة ما فإن قيمته تزداد بمقدار الفوائد التي تستحق على مبلغ الدين خلال مدة التأجيل، وإذا تقدم موعد سداد الدين مدة ما فإن قيمته تنقص إلى القيمة التي لو استثمرت طول مدة التقديم لأصبحت جملتها مساوية لمبلغ الدين الأصلي، بمعنى أن القيمة الاسمية لأي دين تتغير بتغير تاريخ استحقاق الدين.

إن استبدال الديون القديمة بديون جديدة (إعادة جدولة الديون) يخضع للقاعدة الآتية:

القيمة الحالية للديون القديمة (قبل التسوية) = القيمة الحالية للديون الجديدة (بعد التسوية)

يأخذ استبدال الديون (إعادة جدولة الديون) أكثر من شكل نذكر منها:

1- استبدال الدين الأصلي بدين آخر جديد لمدة أطول (أقصر) من مدة الدين الأصلي، أي تأخير (تقديم) تاريخ استحقاق الدين الأصلي.

2- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق الأداء بعد مواعيد استحقاق الديون الأصلية (القديمة).

3- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق قبل مواعيد استحقاق الديون الأصلية .

4- استبدال مجموعة من الديون الأصلية بعدة ديون جديدة مختلفة سواء من حيث القيمة أومن حيث تاريخ الاستحقاق أو كلاهما معاً.

مثـــال:

تاجر مدين لدائن بالمبالغ الآتية:

30000 ل.س تستحق السداد بعد سنة واحدة من الآن .

40000 ل.س تستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن.

50000 ل.س تستحق السداد بعد ست سنوات من الآن.

طلب هذا التاجر من الدائن استبدال الديون الثلاثة الأصلية بدين جديد يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن، فإذا كان معدل الفائدة المركبة % 5 ما قيمة الدين الجديد؟

الحـــل: لنرمز للقيمة الاسمية للدين الجديد بـــــ $V_{n'}$ ومن نص المسألة لدينا:

$$V_{n_1}=30000 \qquad n_1=1 \quad ، \quad i=0.05$$
$$V_{n_2}=40000 \qquad n_2=3$$
$$V_{n_3}=50000 \qquad n_3=6$$

بحسب قاعدة تسوية الديون:

القيمة الحالية للديون الثلاثة الأصلية = القيمة الحالية للدين الجديد.

$$\frac{V_{n'}}{(1+i)^{n'}}=\frac{V_{n_3}}{(1+i)^{n_3}}+\frac{V_{n_2}}{(1+i)^{n_2}}+\frac{V_{n_1}}{(1+i)^{n_1}}$$

$$\frac{V_{n'}}{(1.05)^3}=\frac{50000}{(1.05)^6}+\frac{40000}{(1.05)^3}+\frac{30000}{(1.05)^1}$$

ومنه نجد : $V_{n'}=116266.88 \quad S.p$

مثـــال:

تاجر مدين بثلاثة ديون قيمها الاسمية هي 70000 ، 90000 ، 120000 ل.س وتستحق السداد بعد 5 , 8 , 10 سنوات على الترتيب. اتفق مع دائنة على خصم هـــذه الديون. ما مقدار الخصم إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 12 سنوياً ؟

الحـــل: $V_{n_1}=70000 \quad ، \quad V_{n_2}=90000 \quad ، \quad V_{n_3}=120000$

$$n_1=5 \quad ، \quad n_2=8 \quad ، \quad n_3=10$$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = القيمة الحالية للدين الأول + القيمة الحالية للـــدين الثاني + القيمة الحالية للدين الثالث

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{V_{n_3}}{(1+i)^{n_3}}+\frac{V_{n_2}}{(1+i)^{n_2}}+\frac{V_{n_1}}{(1+i)^{n_1}}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{120000}{(1+0.12)^{10}}+\frac{90000}{(1+0.12)^{8}}+\frac{70000}{(1+0.12)^{5}}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $3863.6788+36349.490+39719.879$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = 114706.157

الخصم = مجموع القيم الاسمية للديون الثلاثة – القيمة الحالية للديون الثلاثة

$$D=(70000+90000+120000)-44706.157=165293.843 \quad S.p$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- أودع شخص مبلغاً من المال قدره 7000 ل.س بفائدة مركبة معدلها % 4 سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية المدة وجد أن جملة ما تكوّن له 12121.76 ل.س، **المطلوب:** احسب مدة إيداع هذا المبلغ.

الجواب: 14 سنة

2- احسب القيمة المستقبلية لقرض قيمته 8500 ل.س بعد 10 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 4.5 سنوياً.

الجواب: 13200

3- بعد مضي ست سنوات من إيداع شخص مبلغ قدره 2500 ل.س في حساب التوفير بفائدة مركبة معدلها % 8 ،انخفض معدل الفائدة المركبة إلى % 5 سنوياً.

المطلوب: كم يكون في حساب الشخص بعد عشر سنوات من تاريخ تغير معدل الفائدة.

الجواب: 6462.12

4- ما المبلغ الذي يجب أن تودعه الآن بفائدة مركبة معدلها % 8 سنوياً على أساس أن الفائدة تضاف كل ثلاثة شهور ولمدة 20 عاماً ليصبح رصيدك 10000 ل.س.

الجواب: 2051.10

5- أودع شخص مبلغاً من المال قدره 1000 ل.س في أحد المصارف لمدة أربع سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية مضافة مرتين في السنة ، فحصل في نهاية الأربع سنوات على مبلغ 1435.77 ل.س. **والمطلوب:** ما معدل الفائدة المركبة ؟

الجواب: % 9.25

6- ما المدة اللازمة لإيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها % 9.5 سنوياً والفائدة تضاف كل ثلاثة شهور للحصول على مبلغ 8000 ل.س؟

الجواب: 5سنوات

7- أودع أحمد مبلغاً قدره 40000 ل.س في مصرف لمدة ثلاث سنوات وستة أشهر، فإذا علمت أن المصرف يعطي فائدة مركبة معدلها % 10 سنوياً. **احسب:** القيمة المستقبلية (الجملة) لهذا المبلغ في نهاية المدة.

الجواب: 55838.584 أو 55902

8- ما المبلغ الذي سيصبح في حسابك بعد عامين من إيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها % 8 سنوياً والفائدة تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة.

الجواب: 5867.55 ل.س

9- عند شراء شخص لجهاز الحاسب، دفع من ثمنه 10000 ل.س نقداً، واتفق مع البائع على دفع مبلغ 7500 ل.س بعد عامين بفائدة مركبة معدلها % 6 سنوياً على أساس أن الفائدة تضاف مرتان في السنة، والمطلوب: ما ثمن جهاز الحاسب نقداً عند تاريخ الشراء؟

الجواب: 16663.65 ل.س

10- أوجد معدل الفائدة الاسمي السنوي حيث تضاف الفوائد مرتين في السنة وبموجبه يؤول مبلغ 1000 ل.س إلى 1266.77 ل.س بعد أربع سنوات.

الجواب: % 6

11- ما معدل الفائدة المركبة الاسمي السنوي حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور، إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة الحقيقي السنوي هو % 8.8 ؟ **الجواب:** % 8.524

12- لدى أحد الأشخاص مبلغ 15000 ل.س، أراد استثماره في أحد المصارف بفائدة مركبة فعرضت عليه ثلاثة مصارف العروض الثلاثة الآتية:

1- فائدة مركبة حقيقية معدلها % 6.85 سنوياً والفائدة تضاف في نهاية كل سنة.

2- فائدة مركبة معدلها % 6.5سنوياً والفائدة تضاف مرتين في السنة.

3- فائدة مركبة معدلها % 6.75سنوياً والفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة. فأي عرض هو الأفضل للمستثمر؟

الجواب: عرض المصرف الثالث % 6.90

13- تاجر مدين بمبلغ 450000 ل.س تستحق في نهاية 6 سنوات، أوجد القيمة الحالية لهذا الدين إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل % 4 سنوياً، ثم احسب قيمة الخصم.

الجواب: 355641.54 , 94358.45

14- ثلاثة ديون قيمها الاسمية 30000 ، 40000 ، 50000 ل.س تستحق بعد 3 , 5 , 6 سنوات على الترتيب والمطلوب:

1ـ أوجد القيمة الحالية للسندات الثلاثة.

2ـ احسب مقدار خصم الديون الثلاثة إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 7سنوياً.

الجواب: 86325.5 , 33674.5 ل.س

15- تاجر مدين بالسندات الآتية:

سند قيمته الاسمية 40000 ل.س ويستحق الدفع بعد عامين.

وسند قيمته الاسمية 70000 ل.س ويستحق الدفع بعد أربع سنوات.

ومجموع قيمتيهما الحالتين 84488.40 ل.س، اتفق المدين مع الدائن على خصم هذين السندين ما معدل الفائدة المركبة التي تم على أساسها الخصم؟.

الجواب: % 8.5

16- شخص مدين بالسندين التاليين:

الأول قيمته 500000 ل.س يستحق الدفع بعد ثلاث سنوات من الآن.

والثاني قيمته 600000 ل.س يستحق الدفع بعد خمس سنوات من الآن.

يريد هذا الشخص أن يستعيض عن هذين السندين بسند وحيد يستحق بعد 7 سنوات من الان، ما القيمة الاسمية للسند الجديد إذا علمت ان معدل الفائدة المركبة % 6 سنوياً.

الجواب: 1 305 398.5 ل.س

17- تاجر مدين بالسندين التاليين:

سند قيمته الاسمية 200000 ل.س يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن.

وسند قيمته الاسمية 300000 ل.س يستحق السداد بعد خمس سنوات من الآن.

أراد هذا التاجر استبدال هذين السندين بسندين جديدين متساويين بالقيمة الاسمية يستحق الأول بعد ست سنوات ويستحق الثاني بعد سبع سنوات، علماً أن معدل الفائـــدة المركبة 6 % سنوياً، ما قيمه كل من السندين الجديدين؟

الجواب: 286201.46 ل.س

الفصل الثالث
الدفعات الدورية

§.1. مفهوم الدفعات

يقصد بالدفعات مجموعة من المبالغ تدفع بشكل دوري منتظم وعلى فترات زمنية متساوية، عندما تكون مبالغها متساوية تسمى بالدفعات الدورية المتساوية، يطلق على المبلغ الذي يدفع دورياً بمبلغ الدفعة، نسمي الزمن من فترة الدفعة الأولى إلى نهاية فترة الدفعة الأخيرة بمدة الدفعة.

عندما تكون الفترة الفاصلة بين كل دفعتين سنة، تسمى الدفعات سنوية. أو تكون الفترة الفاصلة بين كل دفعتين نصف سنة، فتسمى دفعات نصف سنوية أو دفعات شهرية.

أمثلة:

- مجموعة دفعات تدفع لاستثمارها لتتراكم وتصل إلى مبلغ معين في وقت معين (مثل المبالغ التي تدفع شهرياً في حساب ادخار).
- مجموعة دفعات تدفع شهرياً لسداد قرض مع فوائده (مثل القروض العقارية).
- مبالغ الدفعة الواحدة التي تدفع لشركات التأمين للتأمين على الحياة.

1ـ1ـ أنواع الدفعات:

يمكن تقسيم الدفعات إلى أنواع مختلفة وفقاً لأساس التقسيم المستخدم.

1 ـ الدفعات المتساوية والدفعات المتغيرة:

الدفعات المتساوية: هي تلك الدفعات التي يكون فيها مبالغ الدفعة متساوية.

الدفعات المتغيرة: هي الدفعات التي يكون فيها مبالغ الدفعة غير متساوية.

2- الدفعات المحدودة (المؤقتة) والدفعات الدائمة:

الدفعات المحدودة: هي الدفعات التي يستمر سدادها لمدة محدودة.

الدفعات الدائمة: هي تلك الدفعات التي يستمر سدادها دون توقف خلال مدة لانهائية من الزمن.

3- الدفعات العاجلة والدفعات المؤجلة:

الدفعات العاجلة: هي الدفعات التي يبدأ فيها السداد من الدورة الزمنية الأولى من تاريخ اليوم فإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في بداية هذه الدورة الزمنية سميت بالدفعة العاجلة الفورية، وإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في نهاية الدورة الزمنية سميت بالدفعة العاجلة العادية.

الدفعات المؤجلة: فيها يبدأ سداد أول مبلغ للدفعة بعد انتهاء مدة محدودة من بداية التعاقد تسمى ((مدة التأجيل))، فإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في بداية الدورة الزمنية التي تلي مدة التأجيل سميت الدفعة ((مؤجلة فورية))، وإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة من نهاية الدورة الزمنية الأولى لانتهاء مدة التأجيل سميت الدفعة ((مؤجلة عادية)) و أياً كان نوع الدفعات في التقسيمات السابقة فإنها إما أن تسدد مبالغها في آخر كل دورة زمنية فتسمى بدفعات عادية، أو تسدد مبالغها في أول كل دورة زمنية فتسمى بدفعات فورية.

1-2 ـ جملة الدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية:

الدفعات الدورية السنوية المتساوية العادية: هي دفعات متساوية تدفع بشكل دوري في نهاية كل سنة. وتستخدم هذه الدفعات من أجل تسديد القروض ويطلق عليها أحياناً اسم دفعات سداد.

لنرمز لجملة الدفعات هذه بالرمز V_n، ولمقدار الدفعة السنوية (القسط السنوي) R ولمعدل الفائدة المركبة بـ i ، وللقيمة الحالية لها بـ V_p.

إن المبلغ الأول (الدفعة الأولى) يستثمر من نهاية السنة الأولى وحتى نهاية المدة، أي أنه يستثمر لمدة$(n-1)$ سنة وتكون جملته بعد$(n-1)$ سنة:

$$R(1+i)^{n-1}$$

وأن المبلغ الثاني (الدفعة الثانية) يستثمر من نهاية السنة الثانية وحتى نهاية المدة، أي أنه يستثمر لمدة $(n-2)$من السنوات، وتكون جملته بعد $(n-2)$ سنة:

$$R(1+i)^{n-2}$$

وأن المبلغ قبل الأخير (الدفعة قبل الأخيرة) يستثمر لمدة سنة واحدة وتكون جملته:

$$R\left(1+i\right)$$

وأن المبلغ الأخير (الدفعة الأخيرة) لا يستثمر وتبقى قيمته كما هي R.

ومنه جملة الدفعات تساوي:

$$V_n = R\left(1+i\right)^{n-1} + R\left(1+i\right)^{n-2} + ...+ R\left(1+i\right) + R$$

بإعادة ترتيبها عكسياً وإخراج R عامل مشترك نجد:

$$V_n = R\left[1+\left(1+i\right)+\left(1+i\right)^2+.........+\left(1+i\right)^{n-1}\right]$$

الطرف الأيمن داخل القوسين يمثل متوالية هندسة متزايدة حدها الأول (1) وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها (n)، فيكون مجموعها:

$$V_n = R\frac{\left(1+i\right)^n-1}{\left(1+i\right)-1} \Rightarrow V_n = R\frac{\left(1+i\right)^n-1}{i}$$

تمثل العلاقة السابقة القيمة المستقبلية (جملة) لـ n من الدفعات العادية المتساوية قيمة كل منها R ل.س وبمعدل فائدة مركبة i %.

1 ـ3ـ القيمة الحالية للدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية:

لنفرض أن المطلوب هو إيجاد قيمة المبلغ المطلوب استثماره V_P ل.س بفائدة مركبة معدلها السنوي i %، لنحصل على دفعة مكونة من n من الأقساط مقدار كل منها R ل.س تدفع بعد سنة من بدء استثمار المبلغ V_P.

ننظر إلى المبلغ V_P وكأنه يتكون من n من الأجزاء وكل جزء من هذه الأجزاء يموّل قسطاً واحداً من مجموعة من الأقساط عددها n ومقدار كل منها R ل.س. إن كل جزء من هذه الأجزاء يمثل القيمة الحالية لإحدى الدفعات، وتكون القيمة الحالية للدفعات:

$$V_P = R\left(1+i\right)^{-n} + ...+ R\left(1+i\right)^{-2} + R\left(1+i\right)^{-1}$$

بضرب طرفي المساواة بـ $\left(1+i\right)^n$ نجد:

$$V_P\left(1+i\right)^n = R + R\left(1+i\right) + ...+ R\left(1+i\right)^{n-2} + R\left(1+i\right)^{n-1}$$

نعلم أن:

$$R + R\left(1+i\right) + ...+ R\left(1+i\right)^{n-2} + R\left(1+i\right)^{n-1} = V_n$$

وبالتالي:

$$V_P\left(1+i\right)^n = V_n$$

ومنه:
$$V_P = V_n(1+i)^{-n} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$
$$V_P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثـــال:

يودع شخص مبلغاً قدره 2000 ل.س في مصرف في نهاية كل عـــام ولمـــدة 20 عاماً أوجد جملة ما تكون له، إذا كان المصرف يعطـــي فائـــدة مركبـــة معـــدلها 8.5 % سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة.

الحــل: $R = 2000 \quad , \quad i = 0.085 \quad , \quad n = 20$

نظراً لأن الدفعات دورية سنوية عادية نستخدم العلاقة:
$$V_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$V_{20} = 2000\frac{(1+0.085)^{20} - 1}{0.085} = 96754.03 \quad S.p$$

مقدار الفائدة المستحقة = جملة الدفعات – إجمالي الدفعات
$$I = V_n - n\cdot R = 96754.03 - (20)\cdot(2000) = 56754 \quad S.p$$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لدفعات سنوية مبلغها 200 ل.س تدفع آخر كل سنة ولمدة 20 عاماً، على أساس معدل فائدة مركبة 6 % سنوياً.

الحــل: $R = 200 \quad , \quad i = 0.06 \quad , \quad n = 15$

$$V_P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 200\frac{1-(1.06)^{-15}}{0.06} = 1942.45 \quad S.p$$

1 ــ4ــ جملة الدفعات الجزئية الدورية العادية:

الدفعات الجزئية الدورية العادية هي دفعات متساوية في القيمـــة تـــدفع بـــشكل دوري منتظم في نهاية كل دورة زمنية، حيث أن الدورة هي جزء من السنة (شـــهر، فصل، نصف سنة ...الخ).

لتكن مدة الاستثمار هي n من السنوات، ولنقسم كل سنة من هذه المدة إلى m قسماً متساوياً، فيكون $n \cdot m$ هو عدد الدفعات المتساوية خلال الـــ n من السنوات.

لنفرض أن قيمة القرض V ل.س، يسدد على دفعات عادية دورية قيمة كل منها R ل.س تدفع في نهاية كل فترة زمنية جزئية علـــى أســـاس معـــدل فائـــدة مركبـــة معدلها $i\ \%$ سنوياً.

فيكون معدل الفائدة الجزئي لكل فترة زمنية جزئية J_m هو: $J_m = \dfrac{i}{m}$

حيث: m عدد الفترات الجزئية في السنة الواحدة.

إن الدفعة الجزئية الأولى تستثمر من نهاية الفترة الزمنية الجزئية الأولى وحتى نهاية المدة أي إنها تستثمر لمدة $(m \cdot n - 1)$ فترة جزئية وتكون جملتها:

$$R\left(1+J_m\right)^{m \cdot n-1}$$

وأن الدفعة الجزئية الثانية تستثمر من نهاية الفترة الزمنية الجزئية الثانية وحتى نهاية المدة أي أنها تستثمر لمدة $(m \cdot n - 2)$ فترة جزئية وتكون جملتها:

$$R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2}$$

وأن الدفعة الجزئية قبل الأخيرة تستثمر لفترة جزئية واحدة وتكون جملتها:

$$R\left(1+j_m\right)$$

وأن الدفعة الجزئية الأخيرة لا تستثمر وتبقى قيمتها كما هي R.

وبناء عليه فإن جملة الدفعات الجزئية العادية $V_{m,n}$ تكون:

$$V_{m,n} = R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-1} + R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2} + \dots\dots\dots + R\left(1+j_m\right) + R$$

بإعادة ترتيبها عكسياً وإخراج R عامل مشترك نجد:

$$V_{m,n} = R\left[1+\left(1+j_m\right)+\left(1+j_m\right)^2+\dots\dots+\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2}+\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-1}\right]$$

مجموعها يكون:

$$V_{m,n} = R\,\frac{\left(1+j_m\right)^{m \cdot n}-1}{\left(1+j_m\right)-1}$$

ومنه:

$$V_{m,n} = R\,\frac{\left(1+j_m\right)^{m \cdot n}-1}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

تمثل هذه العلاقة جملة دفعات جزئية عادية قيمة كل منها R ل.س.

• تعطى القيمة الحالية للدفعات الجزئية العادية $V_0^{m,n}$ بالعلاقة:

$$V_0^{m,n} = R\,\frac{1-(1+j_m)^{-mn}}{j_m} \quad ، \quad j_m = \frac{i}{m}$$

مثـــال: يودع شخص مبلغاً قدره 1000 ل.س في نهاية كل ســـتة أشـــهر ولمـــدة 10 سنوات في مصرف يعطي فائدة مركبة سنوية 8 % تـضاف مرتـــان فـــي الـــسنة.

والمطلوب: أوجد جملة الدفعات.

الحـــل: نظراً لان الدفعات جزئية نصف سنوية فإن المعدل النصف سنوي هو:

$$j_m = \frac{i}{m} = \frac{0.08}{2} = 0.04$$

$$R = 1000 \ , \ m = 2 \ , \ n = 10 \ , \ m\cdot n = 20$$

باستخدام العلاقة :

$$V_{m,n} = R\,\frac{(1+j_m)^{mn}-1}{j_m} = 1000\,\frac{(1+0.04)^{20}-1}{0.04} = 29778.08 \quad S.p$$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لدفعات عادية مبلغها 200 ل.س تدفع في نهاية كل شـــهر لمدة خمس سنوات على أساس معدل فائدة مركبة سنوية 6 % والفائدة تضاف شهرياً.

الحـــل: الدفعات عادية شهرية والمعدل الشهري للفائدة:

$$j_m = \frac{i}{m} = \frac{0.06}{12} = 0.005$$

$$R = 200 \ , \ m = 12 \ , \ n = 5 \ , \ m\cdot n = 12\times 5 = 60$$

باستخدام العلاقة:

$$V_0^{m,n} = R\,\frac{1-(1+j_m)^{-mn}}{j_m} = 200\,\frac{1-(1+0.005)^{-60}}{0.005} = 10345.11 \quad S.p$$

5-1 جملة الدفعات السنوية الدورية الفورية المتساوية V_n':

الدفعات السنوية الدورية الفورية: هي متتالية من المبالغ تدفع بشكل منتظم فـــي بداية كل سنة وتسمى دفعات إيداع أو استثمار، كلمة فورية تعني أن الدفع أو الإيـــداع يتم في بداية السنة.

إن المبلغ الأول وقدره R ل.س (القسط السنوي الأول) يستثمر مــن بدايــة الفترة الأولى وحتى نهاية المدة، (n) من السنوات، فتكون جملته:

$$.R\left(1+i\right)^{n}$$

وإن المبلغ الثاني R ل.س يستثمر من بداية الفترة الثانية وحتى نهايــة المــدة، أي لمدة $(n-1)$ في السنوات، فتكون جملته:

$$.R(1+i)^{n-1}$$

وإن المبلغ الأخير (الدفعة الأخيرة) يستثمر لفترة واحدة، أي لمدة سنة واحــدة، فتكون جملته:

$$R(1+i)$$

وتكون جملة الدفعات الفورية V_n':

$$V_n' = R\left(1+i\right)^{n} + R\left(1+i\right)^{n-1} + ...+ R\left(1+i\right)^{2} + R\left(1+i\right)$$

$$V_n' = R\left(1+i\right) + R\left(1+i\right)^{2} + ...+ R\left(1+i\right)^{n-1} + R\left(1+i\right)^{n}$$

المجموع الأخير يمثل متوالية هندسية متزايدة حدها الأول $R(1+i)$ وأساســها $(1+i)$ وعدد حدودها (n) هو:

$$V_n' = R\left(1+i\right)\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{\left(1+i\right)-1}$$

$$V_n' = R\,\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i}\left(1+i\right)$$

تمثل هذه العلاقة جملة الدفعات الفورية السنوية.

• **تعطى القيمة الحالية للدفعات الفورية السنوية V_P' بالعلاقة:**

$$V_P' = R\,\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}\left(1+i\right)$$

مثــال:

أوجد القيمة الحالية لدفعات عادية مبلغها 2000 ل.س تدفع في أول كــل ســنة لمدة خمس عشرة عاماً، إذا كانت الفائدة المركبة تحسب بمعدل 6 % سنوياً.

الحــل: نظراً لأن مبلغ الدفعة يسدد في أول كل سنة فتعتبر دفعات سنوية فورية.

$$R = 2000, \quad i = 0.06, \quad n = 15$$

$$V_P' = R\,\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}\left(1+i\right)$$

$$= 2000\frac{1-\left(1+0.06\right)^{-15}}{0.06}\left(1+0.06\right) = 20589.96 \quad S.p$$

مثـــال:

أدخر شخص في أحد المـــصارف (15) دفعـــة ســـنوية فوريـــة قيمـــة كـــل منها (10000) ل.س بفائدة % 5 سنوياً، بهدف تكوين رأسمال. أوجد جملة الدفعات.

الحـــل:

$$R = 10000, \quad i = 0.05, \quad n = 15$$

$$V_n' = R\,\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i}\left(1+i\right)$$

$$= 10000\frac{\left(1+0.05\right)^{-15}-1}{0.05}\left(1+0.05\right) = 226574.9 \quad S.p$$

6-1- جملة الدفعات الجزئية الفورية $V_{m,n}^{*}$:

تحسب جملة الدفعات الجزئية الفورية من العلاقة الآتية:

$$V_{m,n}^{*} = R\left(1+j_m\right)\frac{\left(1+j_m\right)^{m\cdot n}-1}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

كما تحسب القيمة الحالية لدفعات جزئية فورية من العلاقة:

$$V_0^{*,m,n} = R\left(1+j_m\right)\frac{1-\left(1+j_m\right)^{-m\cdot n}}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

§.2 . الدفعات الدائمة:

إذا استثمر مبلغ ما لمدى الحياة، ولم تترك فائدته لتتراكم عليـــه، أي أن المبلـــغ المستثمر ظل ثابتاً وسحبت فائدته في نهاية كل وحدة زمنية فيكون مقدار الفائدة ثابتـــاً ويستمر دفعها على هذا الشكل لمدى الحياة، ويطلق على هذه الفائـــدة اسـم الدفعـــة الدائمة.

أمثـــلة على الدفعات الدائمة:

ــ إيراد العقارات والأراضي.

ــ فوائد السندات.

ــ فوائد القروض طويلة الأجل.

لا يمكن حساب جملة الدفعات الدائمة لأن عددها غير محــــدد ومــــدة ســــدادها بأنواعها المختلفة ليس لها نهاية، الأمر الذي يستحيل معه حساب جملة هــذه الـــدفعات ويمكن التحقق من هذه النتيجة رياضياً كما يلي:

لنرمز بجملة الدفعات الدائمة بالرمز $V_{n,\infty}$:

$$V_{n,\infty} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^{\infty} - 1}{i} = \infty$$

1-2 ــ القيمة الحالية للدفعات الدائمة:

1- القيمة الحالية للدفعات الدائمة العادية V_{∞}

$$V_{\infty} = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i}$$

نلاحظ أن:

$$(1+i)^{-\infty} = \frac{1}{(1+i)^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ومنه القيمة الحالية للدفعات الدائمة العادية يساوي: $V_{\infty} = \dfrac{R}{i}$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لاستثمار عائده الـــسنوي 3000 ل.س، وســـعر الفائـــدة المركبة السائدة هو % 12 سنوياً.

الحـــل:

$$V_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{3000}{0.12} = 25000 \quad S.P$$

2- القيمة الحالية لدفعات دائمة فورية V'_{∞}

$$= R(1+i)\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i}$$

$$V'_{\infty} = \lim_{n\to\infty} R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ومنه القيمة الحالية للدفعات الدائمة الفورية يساوي:

$$V'_{\infty} = \frac{R(1+i)}{i}$$

مثـــال: احسب ثمن شراء قطعة أرض زراعية إيجارها الـــسنوي 1000 ل.س علـــى أساس معدل فائدة مركبة % 4 سنوياً وذلك إذا كان أول دفعة للإيجار تستحق حالاً.

الحـــل: هنا الدفعة دائمة فورية:

$$V'_{\infty} = \frac{R(1+i)}{i} = 1000\left(\frac{1}{0.04}+1\right) = 26000\ S.p$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1 ــ اشترى شخص شقة سكنية واتفق على دفع الثمن كالآتي:

- 20000 ل.س فورياً.
- 1000 ل.س في آخر كل سنة ولمدة 10 سنوات.

والمطلوب: ما ثمن الشقة السكنية نقداً إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل % 5 سنوياً؟

الجواب: $V_p = 27721.735$ ل.س

2ــ اقترضت إحدى الشركات مبلغ 500000 ل.س، وتعهدت بسداده على عشرين دفعة سنوية فما قيمة كل دفعة إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل % 5 سنوياً؟

3ــ دفعة سنوية عادية مدتها خمس سنوات، وجد أن جملتها على أساس معدل فائدة مركبة % 2 سنوياً تساوي 5204 ل.س ما القيمة الحالية للدفعات في أول السنوات الخمس؟

الجواب: $V_p = 4713.46$ ل.س

4- دفعات عادية سنوية مبلغها 100 ل.س، وجد أن قيمتها الحالية على أساس معدل فائدة مركبة % 2.5 سنوياً هي 875.210 ل.س. ما مدة الدفعات ؟

الجواب: $n = 10$

5ــ يودع شخص في مصرف في آخر كانون الأول من كل عام (500) ل.س ابتداء من آخر كانون الأول من عام 1990، وبعد إيداع الدفعة مباشرة في سنة معينة وجد أن رصيده 3661.500 ل.س. أوجد تلك السنة المعينة إذا كان معدل الفائدة المركبة % 15سنوياً.

الجواب: $n = 7$

6- اشترت إحدى الشركات مصنعاً بمبلغ 400000 ل.س، واتفقت مع البائع على أن تدفع له من الثمن 88 216.8 ل.س فوراً، وتسدد الباقي على (20) دفعة متساوية

تدفع كل منها في آخر كل نصف سنة بمعدل فائدة مركبة نصف سنوية % 2.5. وبعد أن قامت الشركة بدفع العشرة أقساط الأولى مباشرة اتفقت مع البائع على دفع الأقساط الباقية عليها مرة واحدة. **والمطلوب:** اوجد قيمة المبلغ الواجب على الشركة دفعه عندئذ؟

الجواب: 17 541.28 ل.س.

7- أودع شخص في أحد المصارف عدداً من الدفعات السنوية المتساوية قيمة كل منها (500) ل.س في أول كل سنة بفائدة مركبة % 3 سنوياً، فحصل في نهاية المدة على مبلغ 9568.44 ل.س. **والمطلوب:** احسب عدد هذه الدفعات ؟

8- ما المبلغ الواجب إيداعه في بداية كل سنة للحصول على مبلغ قدره 6500 ل.س ولمدة ثلاث سنوات على أساس معدل فائدة مركبة % 4 سنوياً ؟

9- يرغب شخص بتكوين رأسمال قدره 1000000 ل.س ، بإيداع 60 دفعة شهرية، على أساس فائدة مركبة معدلها % 9 سنوياً والفائدة تضاف شهرياً. **والمطلوب** ما مقدار القسط الشهري الواجب إيداعه؟

الجواب: $R = 13159.66$

10 - يرغب شخص ببيع سيارته نقداً بمبلغ 2400 وحدة نقدية، وفي حالة البيع بالتقسيط يتم السداد على دفعات شهرية عادية مدتها (24) شهراً، فإذا كان معدل الفائدة الشهرية % 1 احسب قيمة القسط الشهري الذي سيقبضه بائع السيارة. وما مقدار الفائدة المستحقة.

الجواب: $I = 311.52$ $\quad R = 112.98,$

11- طلب أحد المتبرعين من مصرف أن يدفع 1000 ل.س كل ستة شهور لجمعية خيرية مدى الحياة. احسب ما يجب أن يدفعه المتبرع للمصرف مقدماً، علماً أن معدل الفائدة المركبة السنوية % 4 والفائدة تضاف مرتين في السنة في الحالتين الآتيتين:

1 - إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في أول كل ستة شهور.

2 ــ إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في آخر كل ستة شهور.

الجواب: $V'_\infty = 51000 \quad , \quad V_\infty = 50000$

12ــ شخص كان يودع مبلغ 3000 ل.س في آخر كل سنة لمدة خمس سـنوات فـي مصرف ما، ثم قام بإيداع ضعف هذا المبلغ لمدة عشر سنوات التالية، احسب جملة المستحق له في نهاية 20 سنة، إذا كان معدل الفائدة المركبة % 12سنوياً.

الجواب: 289879.39

الفصل السادس
النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات
نموذج ليونتيف
The Static Input-Output Model
Leontief Model

يطلق على النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات اسم نموذج التشابكات القطاعية، ويأتي هذا النموذج من بين أهم النماذج المستخدمة في التخطيط سواءً على المستوى القومي أو المستوى القطاعي. يعتبر العالم الاقتصادي ليونتيف Leontief الذي قام بأبحاثه عن بنية الاقتصاد الأمريكي في عام 1931 في جامعة اكسفورد أول من وضع نموذجاً اقتصادياً لدراسة العلاقة بين المدخلات والمخرجات للاقتصاد الأمريكي.

إن الهدف الأساسي من دراسة نموذج المدخلات والمخرجات هو التحليل الكمي للتشابك بين القطاعات الاقتصادية خلال قيامها بنشاطها الإنتاجي، وبيان العلاقات بين المنتجين باعتبارهم مشترين للعناصر الداخلة في الإنتاج (المدخلات) وبائعين لمنتجاتهم (المخرجات) إلى المستخدمين النهائيين.

في جدول المدخلات والمخرجات توضع النشاطات الاقتصادية بمختلف أنواعها في عدد محدود من القطاعات الإنتاجية، ويختلف عدد تلك القطاعات من جدول إلى آخر بحسب درجة التفصيل في ذلك الجدول. فإذا كان الجدول على درجة عالية من التفصيل كان عدد القطاعات الإنتاجية فيه كثيراً ويصل إلى ثلاثمائة قطاع أو أكثر، وإذا كان الجدول مجملاً وكانت المعلومات الواردة فيه مكثفة كان عدد القطاعات الإنتاجية فيه صغيراً لا يزيد عن عدد أصابع اليد في بعض الأحيان.

§1- – أساسيات نموذج المدخلات والمخرجات

1-1 استخدامات النموذج:

بشكل عام يسعى تحليل جدول المدخلات والمخرجات لاقتصاد دولة ما، إلى توضيح ما هو كائن للاستدلال منه على ما يتوقع أن يكون، وتتلخص الاستخدامات الأساسية لهذا التحليل بالنقاط التالية:

- تحليل الهيكل الاقتصادي للدولة.
- التنبؤ بالتطورات المحتملة في كل قطاع من القطاعات.
- رسم خطط الإنتاج وحل مشكلة الاختيار بين الخطط البديلة التي يمكن إتباعها.

1-2 الخصائص العامة لجدول المدخلات والمخرجات:

- يوضع جدول المدخلات والمخرجات غالباً لسنة معينة .
- يتوقف اختيار القطاعات المشكلة لجدول المدخلات والمخرجات على هدف الدراسة.
- يركز جدول المدخلات والمخرجات على التشابكات بين القطاعات المكونة للجدول.
- تتضح أهمية جدول المدخلات والمخرجات بالنسبة للتخطيط الإقليمي لإمكانية استخدامه على جميع المستويات الاقتصادية، على المستوى القومي، أو على مستوى إقليم معين، أو لمدينة معينة من مدن الدولة، أو حتى على صعيد الوحدة المنتجة.

1-3 – فرضيات النموذج العام لجدول المدخلات والمخرجات:

- سنفترض أن الاقتصاد مكون من n قطاع إنتاجي.
- بصورة موازية لتصنيف النشاطات الإنتاجية في قطاعات، تقسم المنتجات الاقتصادية المختلفة من سلع وخدمات إلى نفس العدد n من الأنواع.
- عدم وجود منتجات مشتركة، أي كل قطاع إنتاجي يتخصص بصنع نوع واحد من المنتجات، وهذا يعني أن كل منتج اقتصادي يجري صنعه في قطاع واحد فقط.
- دالة الإنتاج خطية ومتجانسة من الدرجة الأولى، أي أن كل عملية إنتاجية تتطلب عناصر الإنتاج بنسب ثابتة، وأن هذه العناصر تتزايد بنسبة زيادة الإنتاج.
- ثبات الأسعار النسبية، وذلك لأن تغير هذه الأسعار قد يؤدي إلى تغير نسب مزج عناصر الإنتاج ومن ثم المعاملات الفنية للإنتاج.

§2 – الشكل العام لنموذج المدخلات والمخرجات:

من المعروف أن عملية الإنتاج في القطاعات المختلفة هي عملية متشابكة، فكل قطاع يعتمد في إنتاجه على قطاعات أخرى لتأمين بعض المواد الوسيطة– نصف المصنعة– الداخلة في إنتاجه المتخصص، نعبر عن تشابك القطاعات بواسطة جدول التشابك القطاعي وذلك بطريقتين هما:

- الأولى: ويتم التعبير عن التشابك القطاعي بدلالة كميات المواد المنتجة (بشكلها الطبيعي) وبوحدات قياسية مناسبة.
- الثانية: ويتم التعبير عن التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد المنتجة (بسعر المنتج أو بسعر المستهلك) وبوحدات نقدية ملائمة.

سننظر إلى عملية تحليل التشابك القطاعي في كلتا الطريقتين السابقتين على أنها: عملية سكونية ثابتة، لا تتغير فيها مقادير أو قيم المنتجات المتداخلة، لا سيما وأن عملية التحليل ستكون قصيرة الأجل (عام مثلاً)، تاركين تحليل التشابك القطاعي الديناميكي لفترة طويلة الأجل، والتي تأخذ بعين الاعتبار تغير مقادير أو قيم المنتجات المتداخلة (بسبب التقدم التقني أو التضخم النقدي... الخ) للمراحل الدراسية المتقدمة. الجدول التالي يعطينا صورة واضحة لجدول المدخلات والمخرجات على مستوى اقتصاد قومي مغلق تم تقسيم نشاطه الإنتاجي إلى n قطاع.

المخرجات النهائية X_i	الطلب النهائي Y_i	المخرجات الوسيطة $L_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	القطاعات المستخدمة (المستهلكة) $1 \quad 2.... \quad j.... \quad n$	مدخلات ↑ / مخرجات →
X_1 X_2 .... X_i ..... X_n	Y_1 Y_2 ..... Y_i ..... Y_n	L_1 L_2 ..... L_i ..... L_n	$x_{11}\ x_{12}...x_{1j}...x_{1n}$ $x_{21}\ x_{22}...x_{2j}...x_{2n}$ .... $x_{i1}\ x_{i2}....x_{ij}....x_{in}$ .... $x_{n1}\ x_{n2}...x_{nj}....x_{nn}$	1 2 ... i .... n القطاعات المنتجة (البائعة)
			$C_1\ C_2....C_j.....Cn$	$C_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$
	$V = Y$		$V_1\ V_2....V_j.....V_n$	V_j القيمة المضافة
$X = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i$			$X_1\ X_2....X_j......X_n$	Y_j المدخلات الإجمالية

من الجدول السابق يمكن ملاحظة ما يأتي:

1- إن كل قطاع يتكرر مرتين: المرة الأولى على الأسطر وعلى شكل قطاع منتج (بائع) ونعطيه الرمز i حيث: ($i=1,2,3,...,n$)،فالقطاعات المنتجة هي القطاعات المتمثلة في الأسطر. والأخرى على شكل قطاع مستخدم (مستهلك) ونعطيه الرمز j حيث: ($j=1,2,3,...,n$)، أي القطاعات المستخدمة متمثلة بالأعمدة.

2- سنقوم بتقدير منتجات كل القطاعات بنفس الوحدة، أي سنعتبر منتَج القطاع مساوياً الكمية العينية مضروبة بالسعر الوسطي الذي يباع به المنتَج،وبذلك يمكننا جمع مكونات كل سطر في جدول المدخلات والمخرجات،ومكونات كل عمود فيه.

3- البيانات الخاصة بمخرجات كل قطاع ($i=1,2,3,...,n$) تقرأ سطراً سطراً.

- فالقطاع الأول ($i=1$) يخرج ما قيمته: x_{11}لنفسه ، و x_{12}للقطاع الثاني، و x_{13} للقطاع الثالث... و x_{1n} للقطاع n.

يبلغ مجموع مخرجات القطاع الأول من السلع الوسيطة لجميع القطاعات بما فيه نفسه ما قيمته: $L_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{1n}$

X_1 المخرجات الكلية في القطاع الأول: منه L_1 عبارة عن مخرجات القطـــاع الأول من السلع الوسيطة لجميع القطاعات بما فيه نفسه، والباقي $Y_1 = X_1 - L_1$ عبارة عن مخرجات القطاع الأول لسد حاجة الطلـــب النهـــائي للمـــستهلكين النهـــائيين، (أي مبيعات القطاع الأول من السلع النهائية لقطاع الأعمـــال: القطـــاع العـــائلي، القطـــاع الحكومي).

- والقطاع الثاني ($i=2$) يخرج ما قيمته: x_{21}للقطاع الأول، و x_{22}لنفسه، و x_{23}للقطاع الثالث ... و x_{2n} للقطاع n .

يبلغ مجموع مخرجات القطاع الثاني من السلع الوسيطة لجميع القطاعات بما فيه نفسه ما قيمته: $L_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + ... + x_{2n}$

X_2 المخرجات الكلية في القطاع الثاني: منه L_2 عبارة عن مخرجات القطـــاع الثاني من السلع الوسيطة لجميع القطاعـــات، والبـــاقي $Y_2 = X_2 - L_2$عبـــارة عـــن مخرجات القطاع الثاني لسد حاجة الطلب النهائي للمستهلكين النهائيين، (أي مبيعـــات القطاع الثاني من السلع النهائية لقطاع الأعمال: القطاع العائلي، القطاع الحكومي).

- وهكذا القطاع $(i=n)$ يخرج ما قيمته: x_{n1} للقطاع الأول و x_{n2} للقطاع الثاني و x_{n3} للقطاع الثالث ... و x_{nn} لنفسه.

يبلغ مجموع مخرجات القطاع n من السلع الوسيطة لباقي القطاعات بما فيه نفسه ما قيمته: $L_n = x_{n1}+x_{n2}+x_{n3}+...+x_{nn}$

X_n المخرجات الكلية في القطاع n: منه L_n عبارة عن مخرجات القطاع n من السلع الوسيطة لجميع القطاعات، والباقي $Y_n = X_n - L_n$ عبارة عن مخرجات القطاع n لسد حاجة الطلب النهائي للمستهلكين النهائيين، (أي مبيعات القطاع n من السلع النهائية لقطاع الأعمال: القطاع العائلي، القطاع الحكومي).

4- البيانات الخاصة باستخدامات كل قطاع $(j=1,2,3,...,n)$ تقرأ عموداً عموداً.

- فالقطاع الأول $j=1$ يدخل (يستخدم) ما قيمته: x_{11} من نفسه ، و x_{21} من القطاع الثاني ، و x_{31} من القطاع الثالث... و x_{n1} من القطاع n.

وبذلك يبلغ مجموع مستلزمات الإنتاج الوسيطة في القطاع الأول (المدخلات الوسيطة) ما قيمته: $(C_1 = x_{11}+x_{21}+x_{31}+...+x_{n1})$.

X_1 المدخلات الإجمالية في القطاع الأول:منه C_1 عبارة عن مستلزمات إنتاج، والباقي $V_1 = X_1 - C_1$ القيمة المضافة في القطاع الأول (أجور ورواتب، فائدة على رأس المال، أرباح).

- والقطاع الثاني $(j=2)$ يدخل ما قيمته: x_{12} من القطاع الأول، و x_{22} من نفسه ، و x_{32} من القطاع الثالث ... و x_{n2} من القطاع n.

وبذلك يبلغ مجموع مستلزمات الإنتاج الوسيطة في القطاع الثاني (المدخلات الوسيطة) ما قيمته: $(C_2 = x_{12}+x_{22}+x_{32}+...+x_{n2})$.

X_2 المدخلات الإجمالية في القطاع الثاني: منه C_2 عبارة عن مستلزمات إنتاج، والباقي $V_2 = X_2 - C_2$ القيمة المضافة في القطاع الثاني.

- وهكذا إلى القطاع $(j=n)$ يدخل ما قيمته: x_{1n} من القطاع الأول، و x_{2n} من القطاع الثاني و x_{3n} من القطاع الثالث ... و x_{nn} من القطاع نفسه. وبذلك يبلغ مجموع مستلزمات الإنتاج الوسيطة في القطاع n (المدخلات الوسيطة) ما قيمته: $(C_n = x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+...+x_{nn})$.

X_n المدخلات الإجمالية في القطاع n: منها C_n عبارة عن مستلزمات إنتاج، والباقي $V_n = X_n - C_n$ القيمة المضافة في القطاع n.

5- إذن بشكل عام:

- x_{ij} هو ذلك الجزء من مخرجات القطاع i والذي يستخدم كمدخلات في القطاع j، أو بعبارة أخرى هو ذلك الجزء الذي يدخله القطاع j من إنتاج القطاع i.
- قد يكون أحد القطاعات (مثلاً الثاني) ليس بحاجة لمنتجات أحد القطاعات وليكن (مثلاً الثالث)، عندها تكون $x_{32} = 0$.
- Y_i هو ذلك الجزء من إنتاج القطاع i الذي يتبقى بعد استيفاء حاجة مختلف القطاعات المنتجة والذي يمثل الطلب النهائي (ويتجه للاستهلاك، الاستثمار، ... الخ) على منتجات هذا القطاع.
- $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ قيمة المنتجات النهائية المتولدة في الاقتصاد (الناتج القومي).
- $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ القيمة المضافة في الاقتصاد القومي، أو عوائد عناصر الإنتاج ويساوي الدخل القومي.
- مجموع القيم المضافة للقطاعات المستخدمة (الدخل القومي) يساوي مجموع الطلب النهائي للقطاعات المنتجة (الناتج القومي)، أي: $V = Y$.
- إجمالي المخرجات يساوي إلى إجمالي المدخلات ، حيث نلاحظ أن المخرجات الإجمالية X_i لكل قطاع يساوي إلى مدخلاته X_j الإجمالية.
- الإنتاج الإجمالي في الاقتصاد هو: $X = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$

§-3 – الصيغة الرياضية للنموذج:

بناءً على ما تقدم نستطيع صياغة جدول المدخلات والمخرجات بجملة من المعادلات الخطية كما يلي:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}+Y_1=X_1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}+Y_2=X_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in}+Y_i=X_i \qquad (1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n1}+x_{n2}+x_{n3}+\ldots+x_{nj}+\ldots+x_{nn}+Y_n=X_n$$

يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1)بشكل مختصر على الشكل التالي:

$$(x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in})+Y_i=X_i \qquad ;i=1,2,\ldots,n$$

نسمي هذه العلاقة بميزان الإنتاج في القطاع i، حيث مجموع ما يذهب من المنتج إلى الاستخدام الوسيط $(x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in})$ في كل القطاعات الإنتاجية وما يذهب إلى الاستخدام النهائي Y_i يساوي إلى كمية ما يصنع من المنتج في القطاع i .

باعتبار أن x_{ij} تعبر عن ما يستخدمه القطاع j من سلع وسيطة من منتج القطاع i ويتناسب مع كمية المنتج X_j في القطاع j، نرمز لمعامل التناسب بالرمز a_{ij} حيث:

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j} \qquad (2)$$

نسمي المعامل a_{ij} المعامل الفني Technical Coefficient حيث يمثل اقتصادياً مقدار ما يستخدم القطاع j من السلع الوسيطة، التي ينتجها القطاع i، كي يصنع القطاع j وحدة واحدة من منتجه.

نلاحظ أن: $0 \le a_{ij} < 1$ ، أي a_{ij} غير سالب، لأن $x_{ij} \ge 0$ غير سالب، و $X_j > 0$ موجباً.

- عندما $a_{ij}=0$ ، هذا يعني أن j لا يحتاج لمستلزمات من القطاع i لإنتاج وحدة من القطاع j، أي لا يوجد تدفق قطاعي من القطاع i إلى القطاع j $(x_{ij}=0)$.
- و $a_{ij} \neq 1$ ، لأنه إذا كان $a_{ij}=1$ ، هذا يعني أن $x_{ij}=X_j$ وهذا غير ممكن، لأن كمية السلع الوسيطة x_{ij}، التي يستخدمها القطاع j في صنع منتجه ، أقل من كمية المنتج X_j.

- $a_{ij} < 1$ لأن ثمن منتج القطاع j هو دوماً أكبر من ثمن كل السلع الوسيطة، التي يستخدمها القطاع في الإنتاج.فإذا أريد صنع واحدة من منتج القطاع j فإن أثمان الكميات المستخدمة من السلع الوسيطة ستكون هي عناصر العمود رقم j في المصفوفة A ، لهذا فإن مجموع المعاملات الفنية في كل عمود من أعمدة المصفوفة A سيكون أقل من الواحد.

§-4 – الشكل المصفوفي لنموذج المدخلات والمخرجات:

من العلاقة (2) نستنتج مايلي:

$$x_{ij} = a_{ij}.X_j \qquad (3)$$

بتعويض x_{ij} في جملة المعادلات (1) بقيمتها من العلاقة (3) فنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\, X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1j}X_j + \ldots + a_{1n}X_n + Y_1 = X_1 \\
&a_{21}\, X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2j}X_j + \ldots + a_{2n}X_n + Y_2 = X_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots + a_{ij}X_j + \ldots + a_{in}X_n + Y_i = X_i \qquad (4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \ldots + a_{nj}X_j + \ldots + a_{nn}X_n + Y_n = X_n
\end{aligned}$$

نكتب جملة المعادلات الخطية (4) المتضمنة n معادلة خطية بـ n مجهول بالشكل المصفوفي على اعتبار أن المعاملات الفنية a_{ij} والطلبات النهائية على المنتجات Y_i معلومة ، وكمية المنتجات X_i وهي نفسها المدخلات الكلية مجهولة فنحصل على التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_j \\ \ldots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_i \\ \ldots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_i \\ \ldots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad (5)$$

وبالتالي تكتب العلاقة (5) بالشكل المصفوفي التالي:

$$A_{(n,n)}.X_{(n,1)}+Y_{(n,1)}=X_{(n,1)} \qquad (6)$$

حيث: A مصفوفة المعاملات الفنية، Y شعاع الطلبات النهائية من المنتجات، X شعاع المنتجات المطلوب إيجاد قيمها. أي أن:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ Xi \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$$

§-5 – حل النموذج :

هناك العديد من الطرائق التي يمكن استخدامها لحل نماذج المدخلات والمخرجات، وجميعها لا تختلف من حيث أسلوب الحل، سنتناول الطريقة الأكثر استخداماً وهي طريقة مقلوب مصفوفة المعاملات، (حيث Y,X,A مصفوفات) بالعودة إلى العلاقة (6) نستطيع أن نكتب: $X=A\cdot X+Y$

ننقل الجداء $A.X$ إلى الطرف الأيسر فنجد:

$$X-A.X=Y$$

وبإخراج X في الطرف الأيسر من اليمين عاملاً مشتركاً نجد:

$$[\,I-A\,]\,X=Y \qquad (7)$$

حيث: I هي مصفوفة واحدية من مرتبة مصفوفة المعاملات الفنية A نفسها. $[I-A]$ تسمى بمصفوفة ليونتيف.

إذا كانت المصفوفة $[I-A]$ غير شاذة تكون قابلة للقلب، وبالتالي إذا ضربنا طرفي العلاقة رقم (7) من اليسار بمقلوب مصفوفة ليونتيف $[I-A]^{-1}$ سنجد العلاقة الآتية:

$$[I-A]^{-1}.[I-A].X=[I-A]^{-1}.Y$$

ولما كان الجداء $[I-A]^{-1}.[I-A]=I$ و $I\,X=X$ فالعلاقة السابقة تكتب كما يلي :

$$X=[I-A]^{-1}.Y \qquad (8)$$

أي نوجد مقلوب مصفوفة ليونتيف ونضرب هذا المقلوب بشعاع الطلبات النهائية Y فنحصل على حل نموذج المدخلات والمخرجات.

مثـــال:

الجدول التالي يعطينا صورة مبسطة لجدول المدخلات والمخرجات على مستوى اقتصاد قومي مغلق تم تقسيم نشاطه الإنتاجي إلى ثلاثة قطاعـــات فقــط : الزراعـــة ، الصناعة والخدمات، وذلك في عام 2004 م

المدخلات / المخرجات	الزراعة	الصناعة	الخدمات	الطلبات النهائية Y_i
الزراعة	100	50	20	830
الصناعة	200	300	100	600
الخدمات	150	450	200	350

المصدر فرضي والبيانات معطاة بملايين الوحدات النقدية.

المطلوب:

1 – إيجاد المدخلات والمخرجات الوسيطة لكل قطاع.

2 – إيجاد المخرجات والمدخلات الكلية لكل قطاع.

3 –إيجاد عناصر القيمة المضافة لكل قطاع.

4 –إيجاد الناتج الإجمالي في الاقتصاد.

5 – إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية.

6 – تقرر للعام القادم 2005 رفع الطلب النهائي بنسبة 25 بالمائة من الطلب النهائي ليصل إلى:

$$Y_3' = 437.5 \quad ، \quad Y_2' = 750 \quad ، \quad Y_1' = 1038$$

فما هي مقادير المخرجات الكلية لكل قطاع لسد حاجة الطلب النهائي الجديد ؟

7 – وضح جدول التشابكات القطاعية للعام القادم 2005.

الحل:

1- المدخلات الوسيطة للقطاعات: استخدم قطاع الزراعة ما قيمته: 100 مليون وحدة نقدية من منتجاته، و ما قيمته 200 مليون وحدة نقدية من القطاع الصناعي، و 150 مليون وحدة نقدية من قطاع الخدمات، وبذلك فقد بلغ مجموع مدخلاته الوسيطة 450 مليون وحدة نقدية $C_1 = 100 + 200 + 150 = 450$.

بالأسلوب نفسه نلاحظ أن مجموع المدخلات الوسيطة في القطاع الصناعي قد بلغ $C_2 = 50 + 300 + 450 = 800$ مليون وحدة نقدية،

وفي قطاع الخدمات قد بلغ : $C_3 = 20 + 100 + 200 = 320$ مليون وحدة نقدية.

أما بالنسبة للمخرجات الوسيطة للقطاعات: نلاحظ أن قطاع الزراعة قد باع ما قيمته 100 مليون وحدة نقدية لنفسه للاستمرار في العملية الإنتاجية، وقد باع للقطاع الصناعي ما قيمته 50 مليون وحدة نقدية ولقطاع الخدمات ما قيمته 20 مليون وحدة نقدية ، وبذلك تبلغ مجموع المخرجات الوسيطة لقطاع الزراعة $C_1 = 100 + 50 + +20 = 170$ مليون وحدة نقدية.

وبنفس الأسلوب تبلغ مجموع المخرجات الوسيطة لقطاع الصناعة $C_2 = 200 + 300 + 100 = 600$ مليون وحدة نقدية، ولقطاع الخدمات $C_3 = 150 + 450 + 200 = 800$ مليون وحدة نقدية.

2- المخرجات الكلية للقطاعات:

نلاحظ أن المخرجات الكلية: لقطاع الزراعة

$$X_1 = C_1 + Y_1 = 170 + 830 = 1000$$

ولقطاع الصناعة $X_2 = C_2 + Y_2 = 600 + 600 = 1200$

ولقطاع الخدمات $X_3 = C_3 + Y_3 = 800 + 350 = 1150$

المدخلات الكلية للقطاعات:

بما أن إجمالي المدخلات للقطاعات =إجمالي المخرجات للقطاعات ، إذن:

المدخلات الكلية: لقطاع الزراعة $X_1 = 1000$

ولقطاع الصناعة $X_2 = 1200$

ولقطاع الخدمات $X_3 = 1150$

3-عناصر القيمة المضافة للقطاعات:

المدخلات الكلية في القطاع الزراعي 1000 مليون وحدة نقدية: منه 450 مليون وحدة نقدية عبارة عن مستلزمات إنتاج (مدخلات وسيطة)، والباقي 550 مليون وحدة نقدية عبارة عن القيمة المضافة في ذلك القطاع:

$V_1 = X_1 - C_1 = 1000 - 450 = 550$ مليون وحدة نقدية

(أجور ورواتب، فائدة على رأس المال، أرباح).

وأن المدخلات الكلية في قطاع الصناعة تبلغ 1200 مليون وحدة نقدية: منها 800 مليون وحدة نقدية عبارة عن مدخلات وسيطة، والباقي يعبر عن القيمة المضافة في ذلك القطاع:

$V_2 = X_2 - C_2 = 1200 - 800 = 400$ مليون وحدة نقدية

وأن المدخلات الكلية في قطاع الخدمات تبلغ 1150 مليون وحدة نقدية: منها 320 مليون وحدة نقدية عبارة عن مستلزمات إنتاج (مدخلات وسيطة)، والباقي تعبر عن القيمة المضافة في ذلك القطاع:

$V_3 = X_3 - C_3 = 1150 - 320 = 830$ مليون وحدة نقدية.

4 – **الناتج الإجمالي في الاقتصاد** :ويساوي إلى مجموع المدخلات أو المخرجات النهائية للقطاعات أي:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 1000 + 1200 + 1150 = 3350$$

المدخلات → / المخرجات ↑	الزراعة	الصناعة	الخدمات	المخرجات الوسيطة L_i	الطلب النهائي Y_i	المخرجات النهائية X_i
الزراعة	100	50	20	170	830	1000
الصناعة	200	300	100	600	600	1200
الخدمات	150	450	200	800	350	1150
المدخلات الوسيطة C_j	450	800	320	1570		
القيمة المضافة V_j	550	400	830		$V=Y$ 1780	
إجمالي المدخلات X_j	1000	1200	1150			$X=3350$

5 – مصفوفة المعاملات الفنية: ونحصل على عناصر المصفوفة من العلاقة:

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j}$$

$$A=a_{ij}=\begin{bmatrix}\frac{100}{1000} & \frac{50}{1200} & \frac{20}{1150}\\ \frac{200}{1000} & \frac{300}{1200} & \frac{100}{1150}\\ \frac{150}{1000} & \frac{450}{1200} & \frac{200}{1150}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.04 & 0.02\\ 0.2 & 0.25 & 0.08\\ 0.15 & 0.37 & 0.17\end{bmatrix}$$

نلاحظ من مصفوفة المعاملات الفنية مثلاً $a_{31}=0.15$ تمثل ما يستخدم القطاع الأول من السلع الوسيطة، التي ينتجها القطاع الثالث، كي يصنع القطاع الأول واحدة من منتجه.

6 – لإيجاد المخرجات الكلية لكل قطاع لسد حاجة الطلب النهائي الجديد: نستخدم العلاقة (8) فنكتب:

$$X'=[I-A]^{-1}.Y'$$

– نوجد $[I-A]^{-1}$ بتطبيق العلاقة:

$$[I-A]^{-1} = \frac{1}{|I-A|}\,\Gamma(I-A)$$

فنحصل على:

$$[I-A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.134 & 0.078 & 0.035 \\ 0.341 & 1.423 & 0.145 \\ 0.357 & 0.648 & 1.276 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$X' = \begin{bmatrix} 1.134 & 0.078 & 0.035 \\ 0.341 & 1.423 & 0.145 \\ 0.357 & 0.648 & 1.276 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1038 \\ 750 \\ 437.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1251 \\ 1484 \\ 1415 \end{bmatrix}$$

أي من أجل تلبية حاجة الطلب النهائي والمحدد بـ 1038 على القطـاع الأول وبـ 750 على القطاع الثاني وبـ 437.5 على القطاع الثالث، يتطلب ذلك أن يكـون إجمالي قيم مخرجات القطاعات الثلاثة على الترتيب:

$$X_3 = 437.5 \quad , \quad X_2 = 1484 \quad , \quad X_1 = 1251$$

7 – جدول التشابكات القطاعية لعام 2005 :

نوضح التشابكات القطاعية من العلاقة:

$$x_{ij} = a_{ij}.X_j$$

حيث:

$$x_{11} = a_{11}X_1 = (0.1)(1095) = 109.5$$
$$x_{12} = a_{12}X_2 = (0.04)(1375) = 55$$
$$x_{13} = a_{13}\,X_3 = (0.02)(1413) = 28.26$$

... وهكذا

المدخلات / المخرجات	الزراعة	الصناعة	الخدمات	المخرجات الوسيطة L_i	الطلب النهائي Y_i	المخرجات النهائية X_i
الزراعة	125.1	59.36	28.3	212.76	1038	1251
الصناعة	250.2	371	113.2	734.4	750	1484
الخدمات	187.65	549.08	240.55	977.28	437.5	1415
المدخلات الوسيطة C_j	562.95	979.44	382.05	1924.44		
القيمة المضافة V_j	688.05	504.56	1032.95		$V=Y$ 2225.56	
إجمالي المدخلات X_j	1251	1484	1415			$X=4150$

§-6 – واقعية الخطط المقترحة:

في كثير من الأحيان تكون الخطة المقترحة من قبل واضعي الخطط الاقتصادية غير واقعية وتحتاج إلى تعديل، لإجراء ذلك نأخذ التغيرات لإحـدى العلاقتـين (7) أو (8) السابقتين:

$$(I-A)X=Y$$

$$X=[I-A]^{-1}.Y$$

لتصبح الخطة واقعية فنحصل على العلاقتين التاليتين:

$$(I-A)\Delta X=\Delta Y \qquad (9)$$

$$\Delta X=[I-A]^{-1}\Delta Y \qquad (10)$$

وبالتالي شعاع الطلب النهائي الجديد ، وشعاع المخرجات الجديد يصبحان على التوالي:

$$Y' = Y + \Delta Y$$

$$X' = X + \Delta X$$

مثـــال:

افترض أن اقتصاد ما مكون من ثلاث قطاعات هـــي: الـــصناعة ، الزراعـــة، الخدمات. وافترض أن مصفوفة المعاملات الفنية معطاة كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

إذا كانت الخطة الاقتصادية المقترحة تستهدف تحقيق قائمـــة الطلـــب النهـــائي التالية:

100 مليون وحدة نقدية قيمة منتجات صناعية.

20 مليون وحدة نقدية قيمة منتجات زراعية.

40 مليون وحدة نقدية قيمة خدمات.

المطلوب:

1- إيجاد شعاع الناتج الكلي لتحقيق قائمة الطلب النهائي.

2 - شكل جدول المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد البسيط.

3- إذا افترضنا أن الطاقة الإنتاجية القصوى هي :

180 مليون وحدة نقدية لقطاع الصناعة.

170 مليون وحدة نقدية لقطاع الزراعة.

185 مليون وحدة نقدية لقطاع الخدمات.

في ضوء هذه المعلومات هل نستطيع القول أن الخطة المقترحة هي خطة واقعية أم لا ؟ ماذا تقترح ؟

الحـــل:

1- لإيجاد شعاع الناتج الكلي :نستخدم العلاقة $X = [I - A]^{-1}.Y$

- نوجد مصفوفة ليونتيف : $[I - A]$

$$[I-A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.5 & 0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & -0.2 & -0.1\\ -0.4 & 0.9 & -0.3\\ -0.2 & -0.5 & 0.9\end{bmatrix}$$

ومن ثم معكوس مصفوفة ليونتيف من العلاقة:

$$[I-A]^{-1}=\frac{1}{|I-A|}\Gamma(I-A)$$ فنجد:

$$[I-A]^{-1}=\begin{bmatrix}1.626 & 0.567 & 0.369\\ 1.034 & 1.724 & 0.69\\ 0.936 & 1.084 & 1.576\end{bmatrix}$$

$$X=[I-A]^{-1}.Y=\begin{bmatrix}1.626 & 0.567 & 0.369\\ 1.034 & 1.724 & 0.690\\ 0.936 & 1.084 & 1.576\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\ 20\\ 40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}188.67\\ 165.517\\ 178.38\end{bmatrix}$$

أي لتحقيق قائمة الطلب النهائي المذكورة ينبغي أن يكون الإنتاج الكلي :

للصناعة $X_1=188.67$ مليون وحدة نقدية ، وللزراعة $X_2=165.517$ مليون وحدة نقدية ، وللخدمات $X_3=178.38$ مليون وحدة نقدية .

2- لتشكيل جدول المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد البسيط : نطبق العلاقة

$$x_{ij}=a_{ij}.X_j$$

فنحصل على التشابكات القطاعية:

$$x_{ij}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.5 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}188.67\\ 165.517\\ 178.38\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}37.734+33.1034+17.838\\ 75.468+16.5517+53.514\\ 37.734+82.7585+17.838\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}88.6754\\ 145.5337\\ 138.3305\end{bmatrix}$$

	الصناعة	الزراعة	الخدمات	L_i	Y_i	X_i^*
الصناعة	37.734	33.1034	17.838	88.6754	100	188.67
الزراعة	75.468	16.5517	53.514	145.5337	20	165.53
الخدمات	37.734	82.7585	17.838	138.3305	40	178.33
C_j	150.936	132.4136	89.19	372.5396		
V_j	37.734	33.1164	89.14		160	
X_j	188.67	165.53	178.33			532.53

نتيجة المقارنة بين الطاقات الإنتاجية القصوى للقطاعات الثلاث والإنتاج الكلي الواجب إنتاجه ($X_1 = 188.67$, $X_2 = 165.53$, $X_3 = 178.33$) لتأمين قائمة الطلب النهائي Y ، نلاحظ أن الخطة المقترحة غير واقعية لأنها تتوقع من قطاع الصناعة إنتاجاً كلياً أكثر مما يستطيع تحقيقه لو عمل بأقصى طاقته. إذن يجب تعديل الخطة بإحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى:

إذا افترضنا أننا سنخفض الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة فقط بمقدار 8.67 مليون وحدة نقدية، أي:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} -8.67 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فما التغير في شعاع الطلب النهائي المترتب على تخفيض الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة ؟

بتطبيق العلاقة : $\Delta Y = [I - A]\Delta X$ نحصل على التغير في شعاع الطلب النهائي المترتب على هذا التخفيض في الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة.

$$\Delta Y=\begin{bmatrix}0.8 & -0.2 & -0.1\\ -0.4 & 0.9 & -0.3\\ -0.2 & -0.5 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8.67\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6.936\\ 3.468\\ 1.734\end{bmatrix}$$

أي أنه نتيجة تخفيض الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة بمقدار 8.67 مليون وحدة نقدية، سينخفض الطلب النهائي على منتجات القطاع الصناعي بمقدار 6.936 مليون وحدة نقدية، وسيزداد بمقدار 3.468 مليون وحدة نقدية على منتجات قطاع الزراعة، وأيضاً سيزداد بمقدار 1.734 مليون وحدة نقدية لقطاع الخدمات، وبالتالي شعاع الطلب النهائي الجديد الذي نقترحه والذي تستطيع القطاعات الثلاث تحقيقه في ضوء طاقاتها القصوى هو:

$$Y'=Y+\Delta Y=\begin{bmatrix}100\\ 20\\ 40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6.936\\ 3.468\\ 1.734\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}93.064\\ 23.468\\ 41.734\end{bmatrix}$$

للتحقق من مدى واقعية الخطة بعد التعديل نستخدم العلاقة :

$$X'=[I-A]^{-1}.Y'$$

$$X'=[I-A]^{-1}.Y'=\begin{bmatrix}1.626 & 0.567 & 0.369\\ 1.034 & 1.724 & 0.69\\ 0.936 & 1.084 & 1.576\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}93.064\\ 23.468\\ 41.734\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}180\\ 165.517\\ 178.325\end{bmatrix}$$

نلاحظ بعد التعديل أن الإنتاج الكلي الواجب إنتاجه لتأمين قائمة الطلب النهائي ضمن الطاقات القصوى للقطاعات الثلاث .

الطريقة الثانية:

هي تخفيض الطلب النهائي على منتجات القطاع الصناعي بمقدار 8.67 مليون وحدة نقدية، مع ثبات الطلب النهائي للقطاعين الآخرين ومعرفة ما التغير في الإنتاج الكلي المترتب على تخفيض الطلب النهائي لقطاع الصناعة.

$$\Delta Y=\begin{bmatrix}-8.67\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي بتطبيق العلاقة: $\Delta X = [I - A]^{-1} \Delta Y$ نحصل على التغير في شعاع الناتج الكلي المترتب على هذا التخفيض في الطلب النهائي لقطاع الصناعة.

$$\Delta X = [I - A]^{-1} \Delta . Y = \begin{bmatrix} 1.626 & 0.567 & 0.369 \\ 1.034 & 1.724 & 0.69 \\ 0.936 & 1.084 & 1.576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.67 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.09742 \\ -8.96478 \\ -8.11512 \end{bmatrix}$$

أي أن تخفيض الطلب النهائي لقطاع الصناعة بما قيمته 8.67 مليون وحدة نقدية يترتب عليه تخفيض الإنتاج الكلي بما قيمته : 14.09742 م.و.ن لقطاع الصناعة ، و 8.96478 م.و.ن لقطاع الزراعة ، و8.11512 م.و.ن لقطاع الخدمات.

وبالتالي يصبح الإنتاج الكلي الواجب إنتاجه هو :

$$X' = X + \Delta X = \begin{bmatrix} 188.67 \\ 165.53 \\ 178.33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14.09742 \\ -8.96478 \\ -8.11512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 174.57258 \\ 156.56522 \\ 170.21488 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الإنتاج الكلي للقطاعات الثلاثة ضمن طاقاته القصوى.

تمارين ومسائل غير محلولة

1 – لتكن مصفوفة المعاملات الفنية لاقتصاد دولة ما، وشعاع الناتج الكلي محددان كالتالي:

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.1\\0.3 & 0.3 & 0.3\\0.1 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix}1000\\1000\\1000\end{bmatrix}$$

المطلوب : 1 – أوجد شعاع الطلب النهائي ، واستنتج مجموع القيم المضافة .

2 – تنظيم جدول التشابكات القطاعية بشكل كامل.

2 – احسب حجم منتجات ثلاثة قطاعات لاقتصاد دولة ما ، فيه مصفوفة المعاملات الفنية وشعاع الطلب النهائي محددان كالتالي:

$$A;\begin{bmatrix}0 & 0.3 & 0.4\\0.5 & 0 & 0.2\\0.4 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix} \quad , \quad Y=\begin{bmatrix}300\\300\\200\end{bmatrix}$$

ثم شكل جدول المخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد.

3 – إذا علمت أن إجمالي الناتج القومي في دولة ما في سنة معينة كان 1400 مليون وحدة نقدية موزعة كالتالي: 500 مليون وحدة نقدية إنتاج صناعي، 600 مليون وحدة نقدية إنتاج زراعي، 300 مليون وحدة نقدية خدمات، وأن مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج هي:

$$\begin{bmatrix}0.30 & 0.20 & 0.20\\0.30 & 0.35 & 0.10\\0.20 & 0.10 & 0.20\end{bmatrix}$$

المطلوب: إعداد جدول المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد.

4 – ناقش مدى واقعية خطة اقتصادية تستهدف تحقيق طلب نهائي قدره:

95 مليون وحدة نقدية موزعة كالتالي:

60 مليون وحدة نقدية صناعة.

20 مليون وحدة نقدية زراعة.

15 مليون وحدة نقدية خدمات.

مع العلم أن مصفوفة المعاملات الفنية معطاة بالعلاقة:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.03 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$$

وأن الطاقات الإنتاجية القصوى هي:

100 مليون وحدة نقدية للصناعة.

35 مليون وحدة نقدية للزراعة.

30 مليون وحدة نقدية للخدمات.

الفصل السابع
استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية

تعد الاحتمالات من الأدوات الأساسية في الإحصاء والرياضيات الإدارية، بل أن علمي الإحصاء والرياضيات الإدارية وتطبيقاتهما المختلفة تعتمد على نتائج نظرية الاحتمالات.

في هذا الفصل سنبدأ بتذكير الطالب بالاحتمالات وبقوانين الاحتمالات مفترضين أن الطالب قد درس وبشكل كبير مبادئ الاحتمالات في مقرر مبادئ الإحصاء ومن ثم سنبحث في التطبيقات العملية للاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية.

المبحث الأول
مقدمة في الاحتمالات

§1 – تعريف الاحتمال:

1-1 التعريف الكلاسيكي للاحتمال:

احتمال تحقق الحدث A يساوي ناتج قسمة عدد الحالات الملائمة لتحقق هذا الحدث وليكن m على عدد الحالات الكلية N وذلك بشرط تماثل جميع الحالات الكلية. أي أن:

$$P(A)=\frac{m}{N}$$

والمقصود بشرط التماثل هو أن يكون لكل عنصر من عناصر المجموعة الكلية الفرصة المتساوية نفسها. لذلك يقال أن قطعة النقود سليمة ومتوازنة بمعنى أن فرصة ظهور الصورة تساوي فرصة ظهور الكتابة، ويقال أن حجر النرد سليم ومتوازن بمعنى أن فرصة ظهور كل وجه من الأوجه الستة متساوية. وهكذا لدينا:

$$0 \le P(A) \le 1$$

أي أن قيمة الاحتمال دوماً تتراوح بين الصفر والواحد الصحيح. تساوي الصفر إذا كان الحدث مستحيلاً، بينما تساوي الواحد إذا كان الحدث مؤكداً.

مثـــال:

إذا رمينا حجر نرد سليماً ومتوازناً احسب الاحتمالات التالية:

1-الحصول على الرقم 5 .

2-الحصول على رقم زوجي.

3- الحصول على رقم أكبر من 2 .

4- الحصول على رقم أقل من 7 .

الحـــل:

نفرض أن:

A حدث الحصول على الرقم 5 فيكون: $P(A)=\frac{m}{N}=\frac{1}{6}$

B حدث الحصول على رقم زوجي فيكون: $P(B)=\frac{m}{N}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

C حدث الحصول على رقم أكبر من 2 فيكون: $P(C)=\frac{m}{N}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

D حدث الحصول على رقم أقل من 7 فيكون: $P(D)=\frac{m}{N}=\frac{6}{6}=1$

2-1 تعريف الاحتمال كتكرار نسبي:

لاحظنا أن التعريف السابق للاحتمال يشترط أن تكون الحالات الممكنة متماثلة الأمر الذي قد لا يتحقق دائماً، فقد تكون قطعة النقود متآكلة (أي غير متوازنة) بمعنى أن فرصة الصورة لا تساوي فرصة الكتابة. في هذه الحالة لا يمكن القول أن احتمال الصورة يساوي احتمال الكتابة يساوي $\frac{1}{2}$.

وكمثال آخر عند تقسيم المجتمع إلى مدخنين وغير مدخنين فالحالات الممكنة هنا حالتان فقط هما " مدخن " أو " غير مدخن "، ولكن لا يمكن القول أن احتمال " التدخين " يساوي احتمال عدم التدخين يساوي $\frac{1}{2}$، وذلك لأن الحوادث الكلية لكل حالة غير متماثلة حيث أنه في الغالب لا تتساوى أعداد المدخنين مع أعداد غير المدخنين، أي أن فرصة التدخين لا تساوي فرصة عدم التدخين وبالتالي فإن احتمال إحداهما لا يساوي $\frac{1}{2}$.

في مثل هذه الحالات لا يمكن تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال ونطبق تعريف التكرار النسبي أو التعريف الإحصائي للاحتمال.

فإذا رمينا قطعة نقود n مرة وكانت m_n هي عدد المرات التي تظهر فيها الصورة فإن نسبة عدد الصور إلى عدد الرميات الكلي $= \frac{m_n}{n}$ وهذه النسبة قد لا تساوي $\frac{1}{2}$ ولكن مؤكد أنه كلما زاد عدد الرميات (أي كلما كبرت n) فإن هذه النسبة سوف تقترب من $\frac{1}{2}$. فإذا كانت n كبيرة جداً وتؤول إلى ما لانهاية فإن هذه النسبة تؤول إلى $\frac{1}{2}$. أي أن الاحتمال في هذه الحالة هو نهاية التكرار النسبي، أي:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m_n}{n}$$

وحسب هذا التعريف: إن الاحتمال هو القيمة التي يستقر عندها التكرار النسبي لوقوع الحدث عندما تزيد n بدرجة كافية لتحقق ذلك الاستقرار للتكرار النسبي، حيث n هو عدد مرات إجراء التجربة، m_n هو عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث في عدد n من المرات التي أجريت فيها التجربة.

وبذلك فإن التعريف الثاني للاحتمال يعالج عدم تحقق شرط التماثل. مع ملاحظة أننا نفترض أن لدينا مجتمعاً وهمياً يتكون من عدد لا نهائي من مرات إجراء التجربة. أما إذا كان المجتمع حقيقياً كمثال التدخين فإن الاحتمال لأي حدث يساوي نسبة وجود أو تحقق الحدث في المجتمع.

فمثلاً: إذا كانت نسبة العمال المدخنين في مصنع تساوي 30% فإن احتمال أن يكون العامل مدخناً في هذا المصنع يساوي 30%، وهكذا... أي أن الاحتمال في هذه الحالة هو النسبة السائدة للصفة المدروسة في المجتمع.

مثــال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

القسم \ الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
الأول	5	7	12
الثاني	8	14	22
الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير أحد العمال بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون أعزباً.

2 – أن يكون متزوجاً.

3 – أن يكون من القسم الأول.

4 – أن يكون من القسم الأول أو الثاني.

5 – أن يكون من القسم الأول وأعزباً.

الحل: نفرض أن:

A حدث كون العامل المختار أعزباً فيكون: $P(A) = \frac{23}{50} = 0.46$

B حدث كون العامل المختار متزوجاً فيكون: $P(B) = \frac{27}{50} = 0.54$

C حدث كون العامل المختار من القسم الأول فيكون: $P(C) = \frac{12}{50} = 0.24$

D حدث كون العامل المختار من القسم الأول أو الثاني فيكون:

$$P(D) = \frac{12+22}{50} = \frac{34}{50} = 0.68$$

E حدث كون العامل المختار من القسم الأول وأعزباً فيكون : $P(E) = \frac{5}{50} = 0.10$

§-2 – قوانين الاحتمالات:

1-2 قوانين الجمع:

- إذا كان A و B حدثين متنافيين (أي حدوث أحدهما ينفي أو يمنع حدوث الحادث الآخر)، فإن احتمال حدوث إحداهما هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- إذا كان A و B حدثين غير متنافيين (أي يمكن أن يحدثا معاً) ، فإن احتمال حدوث A أو B (أي احتمال حدوث إحداهما على الأقل) هو :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثـــال :

بالعودة إلى المثال السابق الخاص بتوزيع خمسين عاملاً حسب الحالة الاجتماعية والقسم الذي يعمل به. اختير أحد العمال بطريقة عشوائية . احسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون من القسم الأول أو الثاني.

2 – أن يكون متزوجاً أو من القسم الأول.

3 – أن يكون من القسم الثالث أو أعزب.

الحـــل:

1 – لنفرض A حدث كون العامل من القسم الأول.

B حدث كون العامل من القسم الثاني.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{50} + \frac{22}{50} = \frac{34}{50}$$

2 – لنفرض A حدث كون العامل متزوجاً.

B حدث كون العامل من القسم الأول.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{27}{50} + \frac{12}{50} - \frac{7}{50} = \frac{32}{50}$$

3 – لنفرض A حدث كون العامل من القسم الثالث.

B حدث كون العامل أعزباً.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{16}{50} + \frac{23}{50} - \frac{10}{50} = \frac{29}{50}$$

2-2 قوانين الضرب :

إذا كان A و B حدثين مستقلين فإن احتمال حدوث A و B (أي حدوثهما معاً) هو:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على عدد من الحوادث المستقلة أي أن :

$$P(A\cap B\cap ...\cap Z)=P(A).P(B).....P(Z)$$

مثـــال:

بالعودة إلى المثال السابق الخاص بتوزيع خمسين عاملاً حسب الحالة الاجتماعية والقسم الذي يعمل به. سحب عاملان مع الإرجاع ،احسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون كلاهما من القسم الأول.

2 – أن يكون كلاهما متزوجاً.

3 – أن يكون كلاهما له الحالة الاجتماعية نفسها.

4 – أن يكون كلاهما من القسم نفسه.

الحـــل:

1 – لنفرض: A حدث كون العامل الأول من القسم الأول.

B حدث كون العامل الثاني أيضاً من القسم الأول.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$=\frac{12}{50}.\frac{12}{50}=\frac{144}{2500}$$

2 – لنفرض : A حدث كون العامل الأول متزوج.

B حدث كون العامل الثاني أيضاً متزوج.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$=\frac{27}{50}.\frac{27}{50}=\frac{729}{2500}$$

3 – لنفرض: A حدث كون كلا العاملين متزوجين فإن: $P(A)=\frac{27}{50}.\frac{27}{50}=\frac{729}{2500}$

B حدث كون كلا العاملين عازبين فإن: $P(B)=\frac{23}{50}.\frac{23}{50}=\frac{529}{2500}$

الاحتمال المطلوب هو: $P(A\cap B)=\frac{729}{2500}+\frac{529}{2500}=\frac{1258}{2500}$

4 – إما كلاهما من القسم الأول فهو الحدث A واحتماله:

$$P(A)=\frac{12}{50}.\frac{12}{50}=\frac{144}{2500}$$

أو كلاهما من القسم الثاني فهو الحدث B واحتماله:

$$P(B)=\frac{22}{50}.\frac{22}{50}=\frac{484}{2500}$$

أو كلاهما من القسم الثالث فهو الحدث C واحتماله:

$$P(C)=\frac{16}{50}.\frac{16}{50}=\frac{256}{2500}$$

الاحتمال المطلوب:

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{144}{2500}+\frac{484}{2500}+\frac{256}{2500}=\frac{884}{2500}$$

3-2 قانون الضرب في الحالة العامة:

إذا كان A ، B حدثين غير مستقلين فإن احتمال حدوث $A.B$ (أي حدوثهما معاً) هو:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$$

مثـــال:

بالعودة إلى المثال السابق بافتراض أن السحب بدون إرجاع (أي بدون إرجاع العامل الأول إلى المجموعة قبل سحب العامل الثاني).

الحـــل :

1 – كلاهما من القسم الأول فهو الحدث A واحتماله: $P(A)=\frac{12}{50}.\frac{11}{49}=\frac{132}{2450}$

2 – كلاهما متزوج فهو الحدث B واحتماله: $P(B)=\frac{27}{50}.\frac{26}{49}=\frac{702}{2450}$

3 – كلاهما له الحالة الاجتماعية نفسها فهو الحدث C واحتماله:

$$P(C)=\frac{27}{50}.\frac{26}{49}+\frac{23}{50}.\frac{22}{49}=\frac{702}{2450}+\frac{506}{2450}=\frac{1208}{2450}$$

4 – كلاهما من القسم نفسه فهو الحدث D واحتماله:

$$P(D)=\frac{12}{50}.\frac{11}{49}+\frac{22}{50}.\frac{21}{49}+\frac{16}{50}.\frac{15}{49}=\frac{132}{2450}+\frac{462}{2450}+\frac{240}{2450}=\frac{834}{2450}$$

المبحث الثاني

المتغير العشوائي والتوقع الرياضي للمتغير العشوائي

سنتناول في هذا المبحث تعريف المتغير العشوائي وتوزيعاته الاحتمالية بإيجاز باعتبار قد تمّ دراسته في مقرر مبادئ الإحصاء في السنة الأولى.

§-1 – تعريف المتغير العشوائي:

يعرف المتغير العشوائي بالوسيلة التي يتم بواسطتها التعبير عن نواتج التجربة العشوائية باستخدام الأعداد الحقيقية ليسهل دراسة الظواهر الاحتمالية المختلفة. ويكون المتغير العشوائي منقطعاً إذا أخذ قيماً منفصلة بعضها عن بعض، مثلاً عدد أفراد الأسرة. ويكون المتغير العشوائي مستمر إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في مجال تغيره، مثلاً أطوال أو أوزان الطلاب.

§-2 – التوزيع الاحتمالي للمتغيرات المنقطعة:

يرتبط بأي متغير عشوائي X تابع موجب يسمى تابع الاحتمال للمتغير Xويرمز له بالرمز $p(X)$ يحدد مدى X ويعطي احتمال أخذه للقيم في هذا المدى.

ويحدد هذا التابع شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير لأنه يبين كيف يتوزع الاحتمال الكلي (ومقداره واحد) على قيم المتغير.

فالتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع Xيمثل بتابع $p(X)$ يسمى التابع الاحتمالي، ويعطي احتمالات قيم X المختلفة في صورة جدول أو صيغة رياضية تبين القيم المختلفة التي يأخذها المتغير العشوائي X واحتمالات هذه القيم.

بشكل عام إذا كان Xمتغيراً عشوائياً يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n$ باحتمالات مقابلة: $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)$ وإذا تحقق:

$$p(x_i) \geq 0 \quad ; \quad i = 1,2,...,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

عندئذ يقال أن X يتبع توزيعاً احتمالياً منقطعاً تابعه الاحتمالي $p(X)$.

§-3 – توزيع ثنائي الحدين :

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما وقوع حدث معين أو عدم وقوعه ، وكان احتمال ظهور هذا الحدث في أي محاولة هو p وعلى ذلك فإن احتمال عدم ظهوره هو $q=1-p$ ، فإذا تكررت هذه التجربة أو المحاولة n مرة ، فإن احتمال وقوع هذا الحدث xمرة من بين الـ n من هذه المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$p(x)=C_n^x.p^x.q^{n-x} \qquad ;x=0,1,2,...,n$$

وأن مجموع الاحتمالات المرتبطة بأي تجربة عشوائية تخضع لهذا التوزيع تساوي الواحد .

$$p(0)+p(1)+p(2)+...+p(n)=1$$

يسمى توزيع الاحتمالات هذا على قيم المتغير xالمختلفة بتوزيع ثنائي الحدين أو بشكل مختصر بالتوزيع الثنائي برنولي.

§-4 – التوزيع الاحتمالي المستمر:

إذا كان X متغيراً عشوائيا مستمراً وكان $f(X)$ تابعاً يحقق الشرطين الآتيين:

$$f(X)\geq 0 \ ; \forall X$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)\,dX=1$$

فعندها يتبع المتغير العشوائي X توزيعاً احتمالياً مستمراً تابع كثافته هو $f(X)$ وفي هذه الحالة يكون احتمال وقوع X في مدى معين يساوي المساحة الواقعة فوق هذا المدى وتحت منحنى التابع $f(X)$.

ومن أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري.

في هذا الفصل سنهتم بالتوزيع الاحتمالي للمتغيرات المنقطعة لاستخدامها في تقييم المشروعات التجارية والصناعية.

§5 – التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع :

إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً فإن التوقع الرياضي له (أو القيمة المتوقعة أو المتوسطة للمتغير العشوائي) ونرمز له بالرمز $E(X)$ يعرف كما يلي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \,.P(x_i\ )$$

مثــــال :

إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً بتابع احتمال $P(X)$ كما يظهر في الجدول التالي:

X	$P(X)$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

فأوجد $E(X)$.

الحــــل:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \,.P(x_i\ )$$

$$=(\ 2\times\frac{1}{4})+(3\times\frac{1}{2})+(4\times\frac{1}{4})=3$$

مثــــال : أوجد $E(X)$ إذا كان:

X	$P(X)$
-2	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i)$$

$$=(-2\times\frac{1}{5}) + (-1\times\frac{2}{5})+(0\times\frac{1}{5})+(1\times\frac{1}{5}) =-\frac{3}{5}$$

نلاحظ من المثالين السابقين ما يلي :

1 - ليس بالضرورة أن تكون $E(X)$ قيمة من قيم المتغير العشوائي X ، ففي المثال الأول $E(X)=3$ وهي إحدى قيم المتغير العشوائي X. أما في المثال الثاني $E(X)=-\frac{3}{5}$ وهي ليست إحدى القيم المشاهدة للمتغير العشوائي X.

2 - قد تكون قيمة $E(X)$ سالبة (كما في المثال الثاني) أو قيمة موجبة (كما في المثال الأول) أو قد يكون صفراً.

3 - يقع $E(X)$ بين أقل قيمة للمتغير العشوائي وأكبر قيمة له وذلك في جميع الأحوال.

§-6- التوقع الرياضي لدالة في المتغير العشوائي :

إذا كان $f(X)$ تابع وحيد القيمة في المتغير العشوائي X فإن التوقع الرياضي للتابع $f(X)$ يعرف كما يلي:

$$E[f(X)]=\sum_{i=1}^{n} X_i . P(X_i)$$

وهذه النتيجة هامة جداً حيث تعطي كيفية استنتاج التوقع الرياضي لأي تابع (وحيد القيمة) في المتغير العشوائي X أياً كان الشكل الرياضي لهذه الحالة.

مثـــال:

إذا كانت X متغيراً عشوائياً متقطعاً وكان $f(X)=X^2$ فإن:

$$E(f(X))=E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . p(X)$$

وبالعودة للمثالين السابقين نجد في المثال الأول:

X	$P(X)$	X^2	$X^2.P(X)$
2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{4}{4}=1$
3	$\frac{1}{2}$	9	$\frac{9}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	16	$\frac{16}{4}=4$
$\sum$	1		$\frac{38}{4}$

إذن:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2.p(X_i)=\frac{38}{4}$$

هذه القيمة تعبر عن توقع التابع ، بينما رأينا أن توقع المتغير كان /3/ وفي المثال الثاني:

X	$P(X)$	X^2	$X^2.P(X)$
-2	$\frac{1}{5}$	4	$\frac{4}{5}$
-1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{1}{5}$	0	0
1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$
$\sum$	1		$\frac{7}{5}$

إذن:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2.p(X_i)=\frac{7}{5}$$

§-7- أهم خواص التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي عملية رياضية (كما يتضح من تعريف التوقع) وهذه العملية الرياضية تحقق مجموعة من الخواص من أهمها ما يلي:

1 - $E(C)=C$ ، حيث C ثابت، وهذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لأي ثابت هي هذا الثابت.

فمثلاً : $E(-5)=-5$, $E(2)=2$ ... وهكذا.

2 - $E(CX)=C.E(X)$ وهذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لحاصل ضرب مقدار ثابت C في متغير عشوائي X تساوي حاصل ضرب الثابت في توقع المتغير العشوائي.

فمثلاً إذا أكان $E(X)=7$ ، فإن:

$$E(2X)=2.E(X)=2(7)=14$$

$$E(\frac{X}{3})=\frac{1}{3}.E(X)=\frac{1}{3}.E(X)=\frac{1}{3}.7=\frac{7}{3}$$

وهكذا ...

3 - إذا كان X_1+X_2 متغيرين عشوائيين فإن:

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$$

هذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لمجموع (أو باقي طرح) متغيرين عشوائيين هو مجموع (باقي طرح) توقع كل منهما. فمثلاً إذا كان:

$$E(X_1)=4 \quad , \quad E(X_2)=6.2$$

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=4+6.2=10.2$$

$$E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=4-6.2=-2.2$$

وهذه الخاصية يمكن تعميمها لأكثر من متغيرين عشوائيين حيث أنه إذا كان $X_1,X_2,...,X_n$ متغيرات عشوائية فإن:

$$E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)$$

4 - $E(aX_1+bX_2)=a.E(X_1)+bE(X_2)$

هذه الخاصية نتيجة للخاصتين رقمي (2)، (3) وتعني أن القيمة المتوقعة لمجموع (باقي طرح) حاصل ضرب متغير عشوائي في ثابت وحاصل ضرب متغير عشوائي آخر في ثابت آخر هو مجموع (باقي طرح) حاصل ضرب الثابت الأول في توقع المتغير العشوائي الأول وحاصل ضرب الثابت الثاني في توقع المتغير العشوائي الثاني.

فمثلاً إذا كان $E(X_1)=3$ و $E(X_2)=-2$ فإن:

$$
\begin{aligned}
E(2.X_1+3.X_2) &= 2E(X_1)+3E(X_2)\\
&= 2(3)+3(-2)\\
&= 6-6=0\\
E(5.X_1-4.X_2) &= 5.E(X_1)-4E(X_2)\\
&= 5(3)-4(-2)\\
&= 15+8=23
\end{aligned}
$$

5 - إذا كان X_1 ، X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

$$E(X_1.X_2)=E(X_1).E(X_2)$$

فمثلاً إذا كان $E(X_1)=4$ و $E(X_2)=2$ وكان كل من X_1 و X_2 مستقلاً عن الآخر فإن:

$$E(X_1.X_2)=E(X_1).E(X_2)=4\times 2=8$$

ونلاحظ أن هذه الخاصة لا تتحقق بالضرورة إذا كان X_1 و X_2 غير مستقلين ومن ناحية أخرى فإنه يمكن تعميم هذه الخاصية لأكثر من متغيرين مستقلين وذلك على النحو التالي:

إذا كان لدينا المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, ..., X_n$ فإن:

$$E(X_1.X_2....X_n)=E(X_1).E(X_2)....E(X_n)$$

المبحث الثالث

تطبيق التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية

§1- أهمية التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية:

من المعلوم أن لكل مشروع تجاري أو صناعي العديد من الخطط المتاحة له وعلى صاحب المشروع اختيار أنسبها ويكون ذلك وفقاً للخطوات التالية:

- تحديد صور الأحوال الاقتصادية المتوقعة أو صور الطلب المتوقعة.
- تحديد المنافع المتوقعة من هذه الخطط.
- تحديد الأرباح المتوقعة (أو الخسائر المتوقعة) من الخطط المختلفة.وفي هذه الحالة تكون المنافع المتوقعة ما هي إلا التوقع الرياضي لربح المشروع أو خسارته من كل خطة من الخطط المتاحة، مقترنة بصور الحالة الاقتصادية أو بصور الطلب المختلفة.

مثـال: تاجر يربح 200000 وحدة نقدية في الشهر إذا كان الطلب ممتازاً ونرمز لـه بالرمز A ، ويربح 80000 وحدة نقدية إذا كان الطلب معتدلاً ونرمز لـه بـالرمز B ، ويخسر 20000 وحدة نقدية إذا كان الطلب رديئاً ونرمز له بالرمز C .

فإذا كان احتمال تحقق صور الطلب الثلاث السابقة على الترتيب هو:

$$P(C)=0.1 \qquad ,P(B)=0.6 \qquad ,P(A)=0.3$$

المطلوب: إيجاد التوقع الرياضي لربح هذا التاجر في الشهر ؟

الحل: لإيجاد التوقع الرياضي لربح التاجر في الشهر نوجد حاصل جمع قـيم التوقـع الرياضي لكسبه أو خسارته في ظل صور الطلب الثلاث لأنها قد تتحقق في أي شهر:

$$E(K)=\sum_{i=1}^{3} k_i.p(k_i)$$

$$=200\,000\times 0.3+80\,000\times 0.6+(-20\,000)\times 0.1=106000$$

وحدة نقدية.

مثـال:

اتفق أمير وسفير على أن يقوم سفير بإلقاء ثلاث قطع نقود مرة واحدة، وأن يعطيه أمير المبالغ الآتية:

500 ليرة سورية إذا ظهر الشعار على قطعة واحدة من القطع الثلاث.

1000 ليرة سورية إذا ظهر شعاران على قطعتين من القطع الثلاث.

1500ليرة سورية إذا ظهر ثلاث شعارات على القطع الثلاث.

أما إذا لم يظهر أي شعار على القطع الثلاث فيعطي سفير لأمير مبلغ 700ليرة سورية.

المطلوب: ما هو التوقع الرياضي لما يحصل عليه كل من أمير وسفير؟

الحل: التوقع الرياضي لما يحصل عليه سفير هو:

$$500\times\frac{3}{8}+1500\times\frac{3}{8}+1500\times\frac{1}{8}-700\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{1500}{8}+\frac{4500}{8}+\frac{1500}{8}-\frac{700}{8}$$
$$=\frac{6800}{8}=850$$

ليرة سورية.

التوقع الرياضي لما يحصل عليه أمير هو:

$$700\times\frac{1}{8}-500\times\frac{3}{8}-1000\times\frac{3}{8}-1500\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{700}{8}-\frac{1500}{8}-\frac{3000}{8}-\frac{1500}{8}=-\frac{5300}{8}=-662.5$$

ليرة سورية،نلاحظ أن قيمة التوقع الرياضي لما يحصل عليه سفير قيمة موجبة، في حين أن قيمة التوقع الرياضي لما يحصل عليه أمير قيمة سالبة . وفي هذه الحالة يكون الاتفاق في مصلحة سفير وفي غير مصلحة أمير.

§2 – المنفعة المتوقعة في المشروعات التجارية والصناعية:

تعترض المشروعات التجارية والصناعية أثناء حياتها الإنتاجية **ظواهر** متعددة من بيع وشراء وإنتاج... الخ، وكل **ظاهرة** من هذه الظواهر يمكن أن تتم وفق **خطط بديلة**، وكل **خطة** من هذه الخطط يصادف تنفيذها **حالات متعددة للطلب** على منتجات المشروع (طلب ممتاز، طلب جيد، طلب مقبول، طلب رديء... الخ)، حيث تلك الحالات المتعددة للطلب مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بتعدد الأحوال الاقتصادية (رواج، كساد،...)، وعلى مدير المشروع مقارنة كل خطة من الخطط المتاحة بحالات الطلب

المختلفة ويكون ذلك من خلال حساب المنفعة المتوقعة للخطط المختلفة للمشروع، في إطار العوامل التي تؤثر في الظاهرة والمتصلة بالسياسة العامة للمشروع أو بالنظام العام، أو بالظروف الاقتصادية أو الصناعية أو السياسية، ومن ثم اختيار الخطة الأنسب له. إذن حتى يتمكن صاحب المشروع من تحديد الخطة المناسبة له يتبع الخطوات التالية:

1 – تحديد الخطط المختلفة المتاحة للمشروع، ولتكن مثلاً بهدف التبسيط أربع:

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$$

2 – تحديد حالات الطلب المختلفة ،والتي سنفترضها أيضاً أربع بهدف التبسيط:

$$D_1, D_2, D_3, D_4$$

3 – تحديد احتمالات حالات الطلب المختلفة ولتكن:

$$P(D_1)\ ,\ P(D_2)\ ,P(D_3)\ \ ,\ P(D_4)$$

وهذه الاحتمالات إما أن يقوم صاحب المشروع بتقديرها ذاتياً، أو يقوم بحسابها فيما لو توفر له بيانات عن التجار الآخرين الذين يتعاملون في نفس نوع وعدد السلع التي يتعامل بها.

3 – تحديد ثمن شراء السلع وثمن بيعها.

4 – إعداد مصفوفة رياضية ، توضح ربح التاجر أو خسارته من كل خطة مقترنة بحالات الطلب المختلفة.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} & \begin{bmatrix} Q_1D_1 & Q_1D_2 & Q_1D_3 & Q_1D_4 \\ Q_2D_1 & Q_2D_2 & Q_2D_3 & Q_2D_4 \\ Q_3D_1 & Q_3D_2 & Q_3D_3 & Q_3D_4 \\ Q_4D_1 & Q_4D_2 & Q_4D_3 & Q_4D_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث نلاحظ في المصفوفة السابقة أن:

كل سطر من أسطرها يمثل الأرباح أو الخسائر لخطة واحدة من الخطط مقترنة بحالات الطلب المختلفة، علماً أنه يتم احتساب الربح من العلاقة : سعر المبيع – سعر الشراء وكل عمود من أعمدتها يمثل الأرباح أو الخسائر لحالة واحدة من حالات الطلب للخطط المختلفة.

5 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة للخطط المختلفة والمقترنة بحالات الطلب المختلفة، وذلك بضرب احتمالات حالات الطلب المختلفة $P(D_1)$, $P(D_2)$,$P(D_3)$, $P(D_4)$ في قيم الأرباح والخسائر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة .فإذا رمزنا للأرباح أو الخسائر المتوقعة بالرمز F فمصفوفة الأرباح والخسائر تكتب بالشكل:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}$$

6 – تحديد المنفعة المتوقعة لكل خطة كما يلي:

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الأولى: $EU(Q_1) = F_{11} + F_{12} + F_{13} + F_{14}$

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الثانية: $EU(Q_2) = F_{21} + F_{22} + F_{23} + F_{24}$

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الثالثة: $EU(Q_3) = F_{31} + F_{32} + F_{33} + F_{34}$

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الرابعة: $EU(Q_4) = F_{41} + F_{42} + F_{43} + F_{44}$

وعلى أساس مقارنة قيم المنافع المتوقعة، يمكن اختيار الخطة المناسبة.

مثـــال: مدير إحدى شركات المثلجات يقوم بتوزيع ثلاثة أنواع على الأكثر من المثلجات خلال موسم الصيف. فإذا كانت المثلجات التي تبقى لدى الشركة دون بيع حتى نهاية الصيف تفقد قيمتها.وإذا كان ثمن شراء الكيلو من المثلجات هو 50 ليرة سورية وثمن بيعها 100 ليرة سورية، وأن الخطط المتاحة لهذه الشركة هي:

الخطة الأولى Q_1 : ألا يتعامل في سلعة المثلجات.

الخطة الثانية Q_2 : أن يتعامل في نوع واحد من المثلجات.

الخطة الثالثة Q_3 : أن يتعامل في نوعين من المثلجات .

الخطة الرابعة Q_4 :أن يتعامل في ثلاثة أنواع من المثلجات.

وأن حالات الطلب المختلفة يتم تحديدها على أساس أنواع المثلجات التي تتعامل بها الشركة:

الحالة الأولى D_1 : طلب سيئ في حالة عدم بيع أي نوع من المثلجات.

الحالة الثانية D_2 :طلب متوسط في حالة بيع نوع واحد من المثلجات .

الحالة الثالثة D_3 : طلب جيد في حالة بيع نوعين من المثلجات .

الحالة الرابعة D_4 : طلب ممتاز في حالة بيع ثلاثة أنواع من المثلجات.

تمكنت الشركة من جمع معلومات عن $N = 50$ شركة مثلجات أخرى، كل منها تتعامل بنفس عدد وأنواع المثلجات التي تتعامل بها هذه الشركة في موسم الصيف السابق، موزعة حسب عدد أنواع المثلجات المباعة من قبل كل منها فكانت النتائج كما يلي:

عدد أنواع المثلجات المباعة من قبل كل شركة M_k	عدد شركات المثلجات N_i	i
0	5	1
1	10	2
2	13	3
3	22	4
المجموع	50	

المطلوب: تحديد الخطة التي تحقق للشركة أكبر منفعة ممكنة.

الحــل: لتحديد الخطة التي تحقق للشركة أكبر منفعة ممكنة نتبع الخطوات التالية:

1 – حساب احتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة

$$P(D_1),\ P(D_2)\ ,P(D_3)\ ,P(D_4)$$

يتم حساب هذه الاحتمالات استناداً إلى البيانات التي تمكنت الشركة من جمعها عن الشركات الأخرى وباستخدام توزيع ثنائي الحدين:

$$P(D_i) = C_M^k . p^k . q^{M-k} \quad , \forall k = 0,1,2,3$$

حيث: p احتمال بيع المثلجات.

و q احتمال عدم بيع المثلجات.

- نوجد احتمال بيع سلعة المثلجات من العلاقة: $p = \frac{\bar{Y}}{M}$

حيث: M الحد الأعلى لأنواع المثلجات التي تتعامل بها الشركة، $(M = 3)$

$\bar{Y}$ متوسط عدد الأنواع المبيعة من المثلجات من قبل كل شركة وتساوي إلى مجموع الأنواع التي باعتها الـ 52 شركة $\left(\sum_{i=1}^{4} N_i M_i\right)$ على عدد الشركات $(N = 50)$ أي:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{4} N_i . M_i}{N}$$

$$\bar{Y} = \frac{(0)(5)+(1)(10)+(2)(13)+(3)(22)}{50} = \frac{102}{50} = 2.04$$

وبالتالي:

$$p = \frac{\bar{Y}}{M} = \frac{2.04}{3} = 0.68$$

$$q = 1 - p = 1 - 0.68 = 0.32$$

ومنه وبافتراض k عدد أنواع المثلجات:

$$P(D_i) = C_M^k . p^k . q^{M-k} = C_3^k . (o.68)^k . (0.32)^{3-k} \quad , \forall k = 0,1,2,3$$

$$i = 1 \Rightarrow P(D_1) = C_3^0 (0.68)^0 (0.32)^3 = (0.32)^3 = 0.032768$$

$$i = 2 \Rightarrow P(D_2) = C_3^1 (0.68)^1 (0.32)^2 = 0.208896$$

$$i = 3 \Rightarrow P(D_3) = C_3^2 (0.68)^2 (0.32)^1 = 0.443904$$

$$i = 4 \Rightarrow P(D_4) = C_3^3 (0.68)^3 (0.32)^0 = (0.68)^3 = 0.314432$$

\-------

1

2 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر من كل خطة مقترنة بحالات الطلب المختلفة.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -50 & 50 & 50 & 50 \\ -100 & 0 & 100 & 200 \\ -150 & -50 & 50 & 150 \end{bmatrix} \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} \end{array}$$

حيث نلاحظ من مصفوفة الأرباح والخسائر السابقة أن:

- الشركة لا تحقق أي أرباح أو خسائر في الخطة الأولى Q_1 وذلك مهما كانت حالة الطلب.

- بينما في الخطة الثانية Q_2 ستتكبد الشركة خسارة بمقدار 50 ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وستحقق ربحاً قدره 50 ليرة سورية إذا تحققت إحدى حالات الطلب: الثانية D_2 أو الثالثة D_3 أو الرابعة D_4.
- وفي الخطة الثالثة Q_3 ستتكبد الشركة خسارة بمقدار 100 ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وسوف لا تحقق أي أرباح أو خسائر إذا تحققت حالة الطلب الثانية D_2، وستحقق ربحاً قدره 100 ليرة سورية فيما لو تحققت حالة الطلب الثالثة D_3، وربحاً قدره 200 ليرة سورية فيما لو تحققت حالة الطلب الرابعة D_4.
- وفي الخطة الرابعة Q_4 ستتكبد الشركة خسارة بمقدار 150 ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وخسارة قدرها 50 ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثانية D_2، وستحقق ربحاً قدره 50 ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثالثة D_3، وربحاً قدره 150 ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الرابعة D_4.

3 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة للخطط المختلفة والمقترنة بحالات الطلب المختلفة، وذلك بضرب احتمالات حالات الطلب المختلفة:

$$P(D_1)=0.032768\ ,\ \ P(D_2)=0.208896$$
$$P(D_3)=0.443904\ ,\ P(D_4)=0.314432$$

في قيم الأرباح والخسائر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة .

فنحصل على المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.6384 & 10.4448 & 22.1952 & 15.7216 \\ -3.2768 & 0 & 44.3904 & 62.8864 \\ -4.9152 & -10.4448 & 22.1952 & 47.1648 \end{bmatrix}$$

4 – تحديد المنفعة المتوقعة لكل خطة:

المنفعة المتوقعة من الخطة الأولى:

$$EU(Q_1)=0+0+0+0=0$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثانية:

$$EU(Q_2) = -1.6384 + 10.4448 + 22.1952 + 15.7216 = 46.7232$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثالثة:

$$EU(Q_3) = -3.2768 + 0 + 44.3904 + 62.8864 = 104$$

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الرابعة:

$$EU(Q_4) = -4.9152 - 10.4448 + 22.1952 + 47.1648 = 54$$

وبمقارنة قيم المنافع المتوقعة، نجد أن الخطة الثالثة تحقق للشركة أكبر منفعة ممكنة وتبلغ 104 ، ولذلك ننصح الشركة بأن تبيع نوعين من المثلجات فقط .

مثـــال:

تبين لأحد تجار أجهزة الهاتف الجوال أن عدد أجهزة الهاتف التي يمكن بيعها يومياً خلال عام 2004 م هو 5 أجهزة على الأكثر، وفيما يلي أيام هذه الفترة وفقاً لعدد الأجهزة المباعة.

i	عدد الأيام N_i	عدد أجهزة الهاتف الجوال المباعة يومياً M_k
1	20	0
2	40	1
3	46	2
4	60	3
5	80	4
6	120	5
	366	**المجموع**

فإذا كانت تكلفة الجهاز الواحد 8 آلاف ل. س. وثمن بيعه هو 10 آلاف ل.س، وأراد هذا التاجر الاستفادة من تلك المعلومات في تحديد عدد الأجهزة التي يطلبها يومياً في خلال عام 2005 م كل يوم على حده بحيث يستثمر أمواله استثماراً سليماً، علماً أن الخطط المتاحة لدى هذا التاجر لاختيار إحداها بالنسبة لأي يوم من أيام السنة هي:

الخطة الأولى Q_1 : أن يطلب 3 أجهزة.

الخطة الثانية Q_2 : أن يطلب 4 أجهزة .

الخطة الثالثة Q_3 : أن يطلب 5 أجهزة .

بفرض أن حالات الطلب هي:

طلب رديء D_1 : إذا تم بيع جهازين على الأكثر .

طلب معتدل D_2: إذا تم بيع 3 أو 4 أجهزة .

طلب ممتاز D_3 : إذا تم بيع 5 أجهزة.

المطلوب: تحديد الخطة التي تحقق للتاجر أكبر منفعة ممكنة.

الحــل:

لتحديد الخطة التي تحقق للتاجر أكبر منفعة ممكنة نتبع الخطوات التالية:

1 -حساب احتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة $P(D_1), P(D_2), P(D_3)$:

يتم حساب هذه الاحتمالات استناداً إلى البيانات التي تمكن التاجر من جمعها وباستخدام توزيع ثنائي الحدين:

$$P(D_i)=C_M^k.p^k.q^{M-k} \quad , \forall k = 0,1,2,3,4.5$$

حيث: p احتمال بيع الجهاز .

و q احتمال عدم بيع الجهاز.

- نوجد احتمال بيع الجهاز من العلاقة: $p = \dfrac{\bar{Y}}{M}$

حيث: M الحد الأعلى لعدد الأجهزة التي تعامل بها التاجر، $(M = 5)$

$\bar{Y}$ متوسط عدد الأجهزة المباعة ويحسب من العلاقة التالية :

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{4} N_i.M_i}{N}$$

$$\bar{Y} = \frac{(0)(20)+(1)(40)+(2)(46)+(3)(60)+(4)(80)+(5)(120)}{366}$$

$$= \frac{1232}{366} = 3.366$$

وبالتالي احتمال بيع الجهاز:

$$p=\frac{\bar{Y}}{M}=\frac{3.366}{5}=0.673$$

واحتمال عدم بيع الجهاز: $q=1-p=1-0.673=0.327$

ومنه بافتراض k عدد أجهزة الهاتف المباعة :

$$P(D_i)=C_M^k.p^k.q^{M-k}=C_5^k.(o.673)^k.(0.327)^{5-k} \quad , \forall k=0,1,2,3,4,5$$

$$\begin{aligned}
i=1 \Rightarrow P(D_1) &= p(k=0)+p(k=1)+p(k=2)\\
&= C_5^0(0.673)^0(0.327)^5+C_5^1(0.673)^1(0.327)^4\\
&\quad +C_5^2(0.673)^2(0.327)^3\\
&= 0.003734+0.038475+0.158344=0.200553\approx 0.2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i=2 \Rightarrow P(D_2) &= p(k=3)+p(k=4)\\
&= C_5^3(0.673)^3(0.327)^2+C_5^4(0.673)^4(0.327)^1\\
&= 0.32594+0.33541=0.66135\approx 0.66
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i=3 \Rightarrow P(D_3) &= p(k=5)\\
&= C_5^5(0.673)^5(0.327)^0\\
&= 0.138062\approx 0.14
\end{aligned}$$

2 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر من كل خطة مقترنة بحالات الطلب المختلفة.

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} -14 & 6 & 6 \\ -22 & 3 & 8 \\ -30 & -5 & 10 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{array}
\end{array}$$

حيث نلاحظ من مصفوفة الأرباح والخسائر السابقة أن:

- الخطة الأولى Q_1 تكبد التاجر خسارة قدرها 14 ألف ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الأولى D_1 وتحقق له ربحاً قدره 6 ألف ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثانية D_2 أو الثالثة D_3.
- بينما الخطة الثانية Q_2 ستكبد التاجر خسارة قدرها 22 ألف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وستحقق ربحاً قدره3 آلاف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الثانية D_2وربحاً قدره 8 آلاف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الثالثة D_3.

- وفي الخطة الثالثة Q_3 ستكبد التاجر خسارة بمقدار 30 ألف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وخسارة قدرها 5 آلاف ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثانية D_2، وستحقق ربحاً قدره 10 آلاف ليرة سورية فيما لو تحققت حالة الطلب الثالثة D_3.

3 - إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة للخطط المختلفة والمقترنة بحالات الطلب المختلفة، وذلك بضرب احتمالات حالات الطلب المختلفة:

$$P(D_1)=0.2 \quad , \quad P(D_2)=0.66 \quad , \quad P(D_3)=0.14$$

في قيم الأرباح والخسائر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة . فنحصل على المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} -2.8 & 3.96 & 0.84 \\ -4.4 & 1.98 & 1.12 \\ -6 & -3.3 & 1.4 \end{bmatrix}$$

4 - تحديد المنفعة المتوقعة لكل خطة:

المنفعة المتوقعة من الخطة الأولى:

$$EU(Q_1) = -2.8 + 3.96 + 0.84 = 2$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثانية:

$$EU(Q_2) = -4.4 + 1.98 + 1.12 = -1.3$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثالثة:

$$EU(Q_3) = -6 - 3.3 + 1.4 = -7.9$$

وبمقارنة قيم المنافع المتوقعة ، نجد أن على التاجر الأخذ بالخطة الأولى التي تقتضي التعامل بطلب ثلاثة أجهزة يومياً.

تمارين ومسائل غير محلولة

1 – تبين لأحد مراكز توزيع التجزئة انه يمكن أن يبيع أسبوعياً في عام 2005 أربعة صناديق من الكونسروة على الأكثر ، فإذا علمت أن تكلفة الصندوق 100 ل.س، وأن ثمن بيعه هو 150 ل.س، (علماً أن الكونسروة تتلف إذا لم تباع في نفس الأسبوع) ، وفيما يلي توزيع أسابيع عام 2005 بحسب عدد الصناديق المباعة.

عدد الصناديق المباعة M_k	عدد الأسابيع N_i
0	7
1	8
2	10
3	12
4	15
المجموع	52

فإذا كانت الخطط التي قرر مدير هذا المركز اختيار إحداها بالنسبة لأي أسبوع من أسابيع عام 2006 هي:

الخطة الأولى Q_1 : التعامل في صندوقين.

الخطة الثانية Q_2 : التعامل في ثلاثة صناديق.

الخطة الثالثة Q_3 : التعامل في أربعة صناديق.

وبفرض أن حالات الطلب هي:

الحالة الأولى D_1 : طلب رديء إذا تم بيع صندوقين على الأكثر،

الحالة الثانية D_2 : طلب معتدل إذا تم بيع ثلاثة صناديق .

الحالة الثالثة D_3 : طلب ممتاز إذا تم بيع أربعة صناديق.

فالمطلوب: تحديد الخطة الأفضل لهذا المركز ، والتي بمقتضاها يحقق أكبر منفعة متوقعة نتيجة إتباعها.

2 – قام أحد محلات الحلويات بدراسة الطلب على قوالب الكاتو التي ينتجها أسبوعياً، وقد تبين له أن عدد القوالب التي أنتجها أسبوعياً خلال عام 2005 كان 50 قالباً

على الأكثر، فإذا علمت أن تكلفة إنتاج القالب 100 ل.س، وأن ثمن بيعه هو 150 ل.س، مع العلم أن قوالب الكاتو التي تبقى حتى نهاية الأسبوع تفقد صلاحيتها ، وإليك عدد القوالب التي تم إنتاجها وبيعها خلال أسابيع عام 2005 ، واحتمالات بيعها:

p_k	عدد القوالب المبيعة أسبوعياً N_i
0.06	46
0.15	47
0.27	48
0.32	49
0.2	50
1	$\sum$

فالمطلوب تقديم نصيحتك لمالك هذا المحل حول عدد القوالب التي ينتجها أسبوعياً عام 2006 بحيث تحقق له أكبر منفعة ممكنة، إذا علمت أن:

الخطط المتاحة لهذا المحل هي خمس خطط كما يلي :

الخطة الأولى Q_1 : إنتاج 46 قالباً.

الخطة الثانية Q_2 : إنتاج 47 قالباً.

الخطة الثالثة Q_3 : إنتاج 48 قالباً.

الخطة الرابعة Q_4 :إنتاج 49 قالباً.

الخطة الخامسة Q_5: إنتاج 50 قالباً .

وحالات الطلب المختلفة هي كما يلي:

الحالة الأولى D_1: طلب مقبول إذا تم إنتاج 46 أو 47 قالب كاتو أسبوعياً.

الحالة الثانية D_2: طلب متوسط إذا تم إنتاج 48 قالب كاتو أسبوعياً.

الحالة الثالثة D_3: طلب جيد إذا تم إنتاج 49 أو 50 قالب كاتو أسبوعياً.

3 – تاجر من تجار أجهزة التليفزيون الديجيتال الكبيرة الحجم تبين له على أساس البيانات التي تجمعت لديه عن مبيعاته من عام2002 إلى عام 2005 أن عدد أجهزة التليفزيون التي تم بيعها شهرياً واحتمالات بيعها كانت كما يلي:

N_i عدد الأجهزة	p_k احتمالات البيع
10	0.05
11	0.15
12	0.35
13	0.25
14	0.13
15	0.07

وإذا افترضنا أن ثمن شراء جهاز التليفزيون هو 100 ألف ليرة سورية وثمن بيعه هو 120 ألف ليرة سورية. فإذا أراد هذا التاجر تحديد عدد الأجهزة التي يطلبها شهرياً في خلال عام 2006 كل شهر على حده بحيث يستثمر أمواله استثمارا سليماً . فبماذا تنصحه؟.

4 – تبين لإحدى محال الحلوى أن عدد الفطائر التي يمكن بيعها يومياً خلال الفترة من أول تشرين الثاني حتى آخر كانون الأول 2005 هو 6 مائة فطيرة على الأكثـر.

وفيما يلي أيام هذه الفترة وفقاً لعدد الفطائر المباعة بالمئات:

عدد الأيام	عدد الفطائر المباعة يومياً بالمئات
20	3
50	4
150	5
146	6
366	**المجموع الكلي**

فإذا كانت تكلفة الفطيرة الواحدة 2 ليرة سورية، وثمن بيعها هو 3.5 ليرة سورية وأن الفطائر التي تبقى في نهاية اليوم دون بيع تفسد، وتعتبر خسارة على المحل.

المطلوب: تحديد عدد الفطائر التي يمكن للمحل إعدادها يومياً خلال عام 2006 وحتى يكون استثماره لأمواله استثمارا سليماً.

الفصل التاسع
المرونات

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض المفاهيم الاقتصادية الشائعة والمستخدمة للمشتقات، وجميع هذه المفاهيم حدية (هامشية)، بمعنى أنها تعكس مدى استجابة التابع لتغير لا متناه في الصغر في المتحول المستقل. يمكن توضيح المعنى الاقتصادي للمشتق من خلال سرد بعض الأمثلة الاقتصادية التطبيقية.

§-1- المرونة:

تعتبر المرونة (Elasticity) من الأدوات الفعالة في الاقتصاد، حيث يستخدمها الاقتصادي عندما يرغب في معرفة الطريقة التي يؤثر فيها تغير أحد العوامل على العوامل الأخرى. فمثلاً عندما نريد معرفة كيفية تأثير التغيرات التي تحدث في الأسعار على الكميات المطلوبة فإنه يمكن معرفة التأثير عن طريق المرونة.

وبصفة عامة **يقصد بالمرونة** مدى استجابة أو حساسية التابع للتغير في المتحول المستقل. فالمرونة السعرية هي الاستجابة للتغير في السعر، ومرونة الدخل هي الاستجابة للتغير في الدخل وهكذا ......

سوف نتحدث في هذا الفصل عن عدة أنواع من المرونة نبدأها بمرونة تابع ما بشكل عام ثم ننتقل بالحديث عن مرونة الطلب السعرية وهي أكثر أنواع المرونة شيوعاً في أدبيات الاقتصاد، ثم ننتقل بالحديث عن مرونة العرض السعرية و بعد ذلك عن مرونة الدخل والمرونة الجزئية للطلب والمرونة التقاطعية.

§-2- مرونة تابع:

إن مرونة تابع ما هي بالتعريف هي مدى حساسية هذا التابع نتيجة التغيرات التي من الممكن أن تطرأ على متحوله x المستقل. إذاً هي تعبير واضح عن درجة حساسية هذا التابع مقدرة بنسبة مئوية.

ومن أجل تعريف مرونة تابع ما $y = f(x)$ بالنسبة لمتحوله x رياضياً نفرض أننا أعطينا تغيراً لـــ x مقداره Δx فنحصل على تغير لـــ y مقداره Δy، عندها نعرف مرونة التابع y بالنسبة للمتغير x ونرمز لها بالرمز $\mathrm{E}_x(y)$ بأنها نسبة

التغيرات النســبية للتابع y أي $(\frac{\Delta y}{y})$ إلى التغيرات النسبية للمتحول x أي $(\frac{\Delta x}{x})$ ونكتب ذلك وفق الشكل التالي:

$$E_x(y) = (\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \qquad (1)$$

وهي ما تسمى بالمرونة بين نقطتين.

وتعرف مرونة التابع عند نقطة ما من نقاطه بالعلاقة التالية:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}) = y' \cdot \frac{x}{y} \qquad (2)$$

كما أنه يمكن إيجاد مرونة التابع $y = f(x)$ باستخدام التفاضل اللوغاريتمي حيث نجد أن:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}$$

لأنه كما نعلم:

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبالتعويض نجد:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = y'_x \cdot \frac{x}{y}$$

عند إيجاد المرونة نستطيع تمييز الحالات التالية:

1- إذا كانت المرونة $E_x(y) > 1$ فهذا يعني أن العلاقــة بــين x و y هــي علاقــة طردية، فإذا طرأ على المتحول x أية زيادة (نقصان) بمقدار 1% فسوف يطــرأ على التابع y زيادة (نقصان) بمقدار $E_x(y)\%$ ونقول أن التابع مرن.

2- إذا كان $E_x(y) = 1$ فهذا يدل على أن المرونة متكافئة وتعني إذا طرأ تغيير علــى x بنسبة 1% فإن ذلك يؤدي إلى تغير مقابل في قيمة المتحول y بنــسبة مماثلــة مقدارها 1% ونقول أن التابع (أحادي المرونة).

3- إذا كانت $0 < E_x(y) < 1$ فهذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% يؤدي إلى زيادة y بمقدار أقل من 1% ونقول أن التابع غير مرن.

4- أما إذا كانت $-1 < E_x(y) < 0$ فإن هذا يعني أن العلاقة بين x, y علاقة عكسية. أي أن زيادة x بمقدار 1% ستؤدي إلى تناقص y بمقدار أقل من 1% ونقول أن التابع غير مرن.

5- أما إذا كانت $E_x(y) = -1$ فإن هذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% ستؤدي إلى تناقص y بمقدار 1% أيضاً ونقول إن التابع (أحادي المرونة).

6- أما إذا كانت $E_x(y) < -1$ فهذا يعني أن العلاقة بين y ، x علاقة عكسية فإذا طرأ على المتحول x أية زيادة (نقصان) بمقدار 1% فسوف يطرأ على التابع y نقصان (زيادة) بمقدار أكبر من 1% ونقول أن التابع مرن.

7- إذا كانت $E_x(y) = 0$ تسمى بالمرونة الصفرية، فإن ذلك يعني أن أي تغير على قيمة المتحول المستقل لن يؤدي إلى تغير على قيمة المتحول y ونقول أن التابع عديم المرونة.

ويمكن تلخيص ما سبق على الشكل التالي:

$1 < \left\| E_x(y) \right\|$	التابع مرن
$0 < \left\| E_x(y) \right\| < 1$	التابع غير مرن
$\left\| E_x(y) \right\| = 1$	التابع أحادي المرونة
$E_x(y) = 0$	التابع عديم المرونة

مثـــال:

ليكن لدينا التابع التالي: $y = 3x^3 - 3x^2 + 4x + 8$

ولنفرض أن المتحول x تغير بمقدار 1%. أوجد مرونة التابع وذلك في النقطة $x = 2$.

الحـــل: إن مرونة التابع هي:

$$E_x = y'_x \cdot \frac{x}{y}$$

إن قيمة التابع عند النقطة $x = 2$ هي:

$$y = 3(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) + 8 = 24 - 12 + 8 + 8 = 28$$

وقيمة المشتق في النقطة $x = 2$ هي:

$$y'_x = 9x^2 - 6x + 4 = 9(2)^2 - 6(2) + 4 = 36 - 12 + 4 = 28$$

نعوض في تابع المرونة نجد:

$$E_x(y) = 28.\frac{2}{28} = 2$$

وهذا يعني أنه إذا تغير المتحول x بنسبة 1% فإن التابع y سوف يتغير بمقدار 2% بنفس الاتجاه لأن المرونة موجبة.

§-3- خــواص المــرونــة:

تتمتع المرونة بخاصتين:

الخاصة الأولى: مرونة جداء تابعين y , z تساوي لمجموع مرونتي التابعين بالنسبة للمتغير نفسه.

إذا كان لدينا التابعين $y = f(x)$, $z = g(x)$ فإن:

$$E_x(y \cdot z) = E_x(y) + E_x(z)$$

البرهــان: لدينا

$$E_x(y \cdot z) = \frac{d(y \cdot z)}{dx} \cdot \frac{x}{y \cdot z} = \frac{z\,dy + y\,dz}{dx} \cdot \frac{x}{y \cdot z}$$

ومنه:

$$E_x(y \cdot z) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{z \cdot x}{y \cdot z} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{y \cdot x}{y \cdot z}$$

وبالاختصار نجد:

$$E_x(y \cdot z) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{z}$$

ومنه:

$$E_x(y \cdot z) = E_x(y) + E_x(z)$$

وهو المطلوب.

الخاصة الثانية: إن مرونة تابع كسري $\frac{y}{z}$ يساوي مرونة تابع البسط مطروحاً منه مرونة تابع المقام بالنسبة للمتغير نفسه، أي:

$$E_x(\frac{y}{z}) = E_x(y) - E_x(z)$$

البرهــان:

$$E_x(\frac{y}{z}) = \frac{d(\frac{y}{z})}{dx} \cdot \frac{x}{\frac{y}{z}} = \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2 dx} \cdot \frac{z \cdot x}{y}$$

$$E_x(\frac{y}{z}) = \frac{dy}{z^2 dx} \cdot \frac{z^2 \cdot x}{y} - \frac{y\,dz}{z^2 dx} \cdot \frac{z \cdot x}{y}$$

بالاختصار نجد:

$$E_x(\frac{y}{z}) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{z}$$

ومنه:

$$E_x(\frac{y}{z}) = E_x(y) - E_x(z)$$

وهو المطلوب.

مثــال:

ليكن لدينا التابع $y = (5x^2 - 3x + 4)e^{5x}$ والمطلوب إيجاد مرونة هذا التابع.

الحــل: نلاحظ أن التابع يكتب بشكل جداء تابعين $y = u \cdot v$ حيث:

$$u = 5x^2 - 3x + 4$$

$$v = e^{5x}$$

وبتطبيق الخاصة الأولى نجد:

$$E_x(u) = u'_x \cdot \frac{x}{u} = (10x - 3) \cdot \frac{x}{5x^2 - 3x + 4} = \frac{10x^2 - 3x}{5x^2 - 3x + 4}$$

$$E_x(v) = v'_x \cdot \frac{x}{v} = 5e^{5x} \cdot \frac{x}{e^{5x}} = 5x$$

ومنه تكون المرونة الكلية:

$$E_x(y) = E_x(u) + E_x(v) = \frac{10x^2 - 3x}{5x^2 - 3x + 4} + 5x$$

§-4- أنواع المرونات: فيما يلي نستعرض بعض أنواع المرونات:

4-1- مرونة الطلب السعرية :

كما هو معروف في التحليل الجزئي، أن قانون الطلب ينص على وجود علاقة عكسية بين سعر سلعة ما والكمية المطلوبة منها، فإذا زاد السعر انخفضت الكمية المطلوبة، وإذا انخفض السعر زادت الكمية المطلوبة، ولكن قانون الطلب لا يكشف عن درجة التغير أو مدى استجابة الكمية المطلوبة للتغير في سعر السلعة. ويطلق الاقتصاديون على مدى استجابة الكمية المطلوبة للتغير في السعر اسم مرونة الطلب السعرية (Price Elasticity of Demand) أو مرونة الطلب بالنسبة للسعر أو اختصاراً مرونة الطلب. كما أنها تعد من المعايير الاقتصادية الهامة التي تدخل في دراسة سلوك المستهلك، والتي تقيس درجة تغير الكميات المطلوبة حينما يتغير السعر. ليكن لدينا تابع الطلب على سلعة ما D يتعلق بالسعر P بالعلاقة التالية:

$$D = f(P)$$

وبفرض أن سعر السلعة P تغير بمقدار ΔP حينها يتغير الطلب D بمقدار ΔD. نعرف مرونة الطلب السعرية ، بأنها نسبة التغيرات النسبية للكمية المطلوبة من سـلعة معينة إلى التغيرات النسبية لسعر هذه السلعة.

فإذا رمزنا لمرونة الطلب السعرية بالرمز $E_P(D)$ فإن:

$$E_P(D) = \frac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{D} \qquad (1)$$

ونستطيع التعرف إلى مرونة الطلب على سلعة معينة من أجل نقطة ما وفق العلاقة التالية:

$$E_P(D) = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{D} = D'_P \frac{P}{D} \qquad (2)$$

إن العلاقة بين الطلب والسعر هي غالباً علاقة عكسية، فإذا زاد سعر الوحدة المنتجة فسوف يقابله نقصان في الكمية المطلوبة (والعكس صحيح). إذاً لـــ D و P اتجاهان متعاكسان وإن إشارة النسبة بين تغيراتهما هي إشارة سالبة، وحتى يكون

لعلاقة المرونة السابقة $E_P(D)$ مدلول اقتصادي (أي حتى تكون $E_P(D) > 0$) فقد جرت العادة على إهمال الإشارة السالبة والأخذ بالقيمة المطلقة لمرونة الطلب السعرية(*).

مثـــال:

ليكن تابع الطلب على سلعة ما معطى بالعلاقة التالية: $D = 20 - 2P$. احسب المرونة السعرية عند كل من السعر $P = 2$ وكذلك عند $P = 6$.

الحـــل: نوجد مشتق تابع الطلب بالنسبة للسعر فنجد أن: $D'_P = -2$

وبالتعويض بعلاقة مرونة الطلب السعرية نجد أن:

$$E_P(D) = D'_P \cdot \frac{P}{D} = \frac{-2P}{20-2P} = \frac{-P}{10-P}$$

1- عندما $P = 2$ نجد أن مرونة الطلب السعرية هي:

$$E_P(D) = \frac{-(2)}{10-2} = \frac{-1}{4} = -0.25$$

هذا يعني أنه عندما يطرأ تغير على السعر P بمقدار 1% عند القيمة $P = 2$ فإن الطلب على السلعة سيتغير بالاتجاه المعاكس بنسبة أقل من 0.25% أي أنه بالقيمة المطلقة أقل من الواحد الصحيح وهذا يعني أن الطلب غير مرن.

2- عندما $P = 6$ نجد أن:

$$E_P(D) = \frac{-(6)}{10-6} = \frac{-6}{4} = -1.5$$

(*) يمكن كتابة مرونة الطلب السعرية على النحو التالي :

$$E_P(D) = -\frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D} = -D'_P \cdot \frac{P}{D}$$

وذلك بفرض أن النسبة $\frac{dD}{dP} < 0$ موجبة دائماً. إذا $E_P(D)$ هي سالبة دائماً. وتبين قيمتها المطلقة النسبة المئوية لمدى التناقص الذي طرأ على الكمية المطلوبة D حينما يتغير سعر السلعة بمقدار 1% .

هذا يعني أنه إذا تغير السعر بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة سوف يزداد بمقدار 1.5% بالاتجاه المعاكس. أي أن القيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح وهذا يعني أن الطلب مرن.

ملاحظات :

1- يوضح المثال السابق أن المرونة هي تابع للسعر وتتغير من نقطة إلى أخرى لذا تحسب عند نقطة معينة P_0 وتسمى هذه بمرونة النقطة P_0 لتمييزها عن غيرها من المرونات.

2- نلاحظ أنه عندما يكون تابع الطلب خطياً كالذي استخدمناه في المثال السابق، فإن المشتق الأول له ثابت، إلا أن المرونة متغيرة من نقطة إلى أخرى، أي أن هناك فارق بين ميل التابع (المشتق الأول له) وبين المرونة حيث تختلف المرونة من نقطة إلى أخرى للتابع الخطي، بينما الميل ثابت لا يتغير لهذه التوابع.

3 - لا يعني ما ذكرناه سابقاً أن المرونة تتغير دائماً فهناك توابع تتصف بثبات المرونة.

مثال: أوجد مرونة تابع الطلب المعطى بالعلاقة التالية:

$$D = AP^{-\alpha}$$

لنحسب المشتق الأول للتابع:

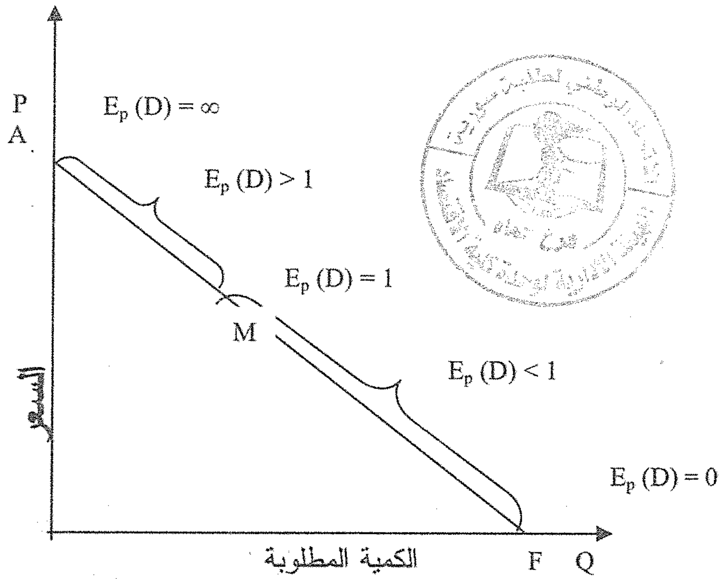
$$D'_P = -\alpha AP^{-\alpha-1}$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$E_P(D) = (-\alpha AP^{-\alpha-1})\frac{P}{AP^{-\alpha}} = -\alpha$$

وهذا يعني أن المرونة ثابتة دائماً.

4- ومن الحالات الخاصة للمرونة أنه قد لا ترتبط الكمية المطلوبة بالسعر وبالتالي لا تتغير مع تغيرات السعر (مثال على ذلك الاستهلاك العائلي للملح حيث أنه لا يؤدي عملياً انخفاض سعر الملح إلى ارتفاع استهلاكه وخاصة أن سعره رخيص أصلاً) وفي هذه الحالة نجد أن تابع الطلب يكون على الشكل التالي $D = K$ حيث K كمية ثابتة. وبتطبيق قانون المرونة نجد أنها تساوي الصفر ويسمى الطلب في هذه الحالة عديم المرونة ويكون منحني الطلب خط مستقيم عامودي عند الكمية K.



الشكل رقم (1)

يبين الشكل اختلاف المرونة السعرية على منحني الطلب في حال كون منحني الطلب خطياً.

2-4- مرونة الطلب الدخلية:

إن مرونة الطلب الدخلية (Income Elasticity of Demand)، أو مرونة الطلب بالنسبة للدخل أو مرونة الدخل، تقيس مدى حساسية واستجابة الكمية المطلوبة من سلعة معينة للتغير في دخل المستهلك.

ليكن لدينا تابع الطلب: $D = f(I)$

حيث أن D تابع الطلب على سلعة معينة خلال فترة زمنية ويتبع الدخل I في تغيراته (حيث I دخل المستهلك) دون النظر إلى المتحولات الأخرى. إذا طرأ تغير على الدخل I بمقدار ΔI أدى ذلك إلى حدوث تغير في تابع الطلب D على السلعة الاقتصادية بمقدار ΔD. نعرف مرونة الطلب الدخلية بأنها نسبة التغيرات النسبية للطلب على سلعة معينة إلى التغيرات النسبية للدخل أي:

$$E_I(D) = \frac{\Delta D}{\Delta I} \cdot \frac{I}{D}$$

ويمكن كتابة مرونة الطلب لسلعة معينة من أجل نقطة ما وفق العلاقة التالية:

$$E_I(D) = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta I} \cdot \frac{I}{D} = D'_I \cdot \frac{I}{D}$$

وتدل إشارة معامل مرونة الدخل على نوع السلعة بالنسبة للمستهلك. فإذا كانت مرونة الدخل لسلعة ما موجبة فإن السلعة تعتبر عادية. أما إذا كانت مرونة الدخل سالبة فإن السلعة تعتبر رديئة بالنسبة لذلك المستهلك.

1- إذا كان $0 < E_I(D) < 1$ فإن السلعة ضرورية ، هذا يعني أن زيادة الدخل بنسبة معينة سيؤدي إلى زيادة الكمية المشتراة من السلعة بنسبة أقل.

2- إذا كان $1 < E_I(D)$ فإن السلعة تكون كمالية. هذا يعني أن زيادة الدخل بنسبة معينة سيؤدي إلى زيادة الكمية المشتراة من السلعة بنسبة أكبر.

3- إذا كان $E_I(D) < 0$ فإن السلعة رديئة.

ويلاحظ أنه ليس هناك سلعة رديئة أو عادية عند جميع مستويات الدخل والواقع هو أن غالبية السلع تكون عادية عند مستويات الدخل المنخفضة، وغالبيتها أيضاً تكون رديئة عند مستويات الدخل المرتفعة، لذلك فإن سلعة ما قد تكون سلعة عادية عند مستوى دخل منخفض، وتكون رديئة عند مستوى دخل مرتفع، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثـــال:

يقوم مستـــهلك بشراء كميات مختلفة من أربع سلع (A , B , C , M) فإذا فرضنا أن الدخل الشهري لهذا المستهلك والذي يبلغ 1000 وحده نقدية قد ارتفع بمقدار 10 وحدات نقدية. ونتيجة لذلك طرأت بعض التغيرات على شراء المواد الأربع السابقة وفق الجدول التالي:

الكميات المطلوبة من السلع				الدخل وحدة نقدية
M	C	B	A	
100	50	100	200	1000
99	40	100	202	1010

والمطلوب: دراسة الطلب على السلع السابقة.

الحـــل: من الجدول نجد أن التغير في الدخل هو $\Delta I = 10$

وكذلك نجد التغير في الطلب على السلع A, B, C, M هو:

$$\Delta D_A = 2 \qquad \Delta D_B = 0 \qquad \Delta D_C = -10 \qquad \Delta D_M = -1$$

وبالتالي تكون مرونة الطلب على السلعة الأولى A بالنسبة للدخل هي:

$$E_A(D) = \frac{\Delta D_A}{\Delta I} \cdot \frac{I}{D_A} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1000}{200} = 1$$

وهذا يعني أنه إذا تغير دخل المستهلك بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة A سيتغير وبنفس الاتجاه بمقدار 1% أيضاً. أي طردية وأحادية المرونة.

أما بالنسبة للسلعة الثانية B فنجد أن:

$$E_B(D) = \frac{0}{10} \cdot \frac{1000}{100} = 0$$

وهذا يدل على أن المرونة معدومة أي أنه إذا تغير الدخل بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة B لن يتأثر. وهذه المرونة عادة مرتبطة بالطلب على السلع الأساسية (مثلاً مادة الخبز).

أما مرونة الطلب على السلعة الثالثة C بالنســبة للدخل فهي:

$$E_C(D) = \frac{-10}{10} \cdot \frac{1000}{50} = -20$$

أي أن المرونة عكسية وكبيرة وهذا يعني أنه بتغير الدخل 1% فإن طلب المستهلك سوف سيتغير بالاتجاه المعاكس على السلعة C بمقدار 20% وهذا يفسر ظاهرة اتجاه المستهلكين نحو شراء بعض السلع الأخرى البديلة للسلعة C والتي كان من الصعب عليهم شراءها قبل زيادة الدخل.

وأخيراً نجد مرونة الطلب على السلعة M تكون مساوية لـــ:

$$E_M(D) = \frac{-1}{10} \cdot \frac{1000}{100} = -1$$

تعني أن العلاقة بين الدخل والطلب على السلعة M علاقة عكسية ولكنها أحادية المرونة أي أن تغير الدخل بمقدار 1% يؤدي إلى تغير الطلب على السلعة M بالنسبة نفسها ولكن بالاتجاه المعاكس .

مثـــال:

إذا كان تابع الطلب على سلعة السمن النباتي متمثلة بالمعادلة الآتية:

$$D_1 = 10 - 0.5\,P_1 + 0.8\,P_2 + 0.1\,I$$

حيث D_1 ترمز للكمية المطلوبة، و P_1 ترمز لسعر الوحدة من السلعة و P_2 ترمز لسعر الوحدة من السلعة البديلة (سمن حيواني) و I ترمز للدخل.

1- احسب مرونة الطلب السعرية عندما يكون : $I = 100$ ، $P_2 = 15$ ، $P_1 = 6$

2- احسب مرونة الطلب الدخلية عندما يكون : $I = 200$ ، $P_2 = 6$ ، $P_1 = 3$

الحـــل : 1- إن مرونة الطلب السعرية تعطى بالعلاقة:

$$E_{p_1}(D_1) = \frac{\partial D_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{D_1}$$

باشتقاق تابع الطلب نجد : $\frac{\partial D_1}{\partial P_1} = -0.5$

نعوض في تابع الطلب عند النقطة $I = 100$ ، $P_2 = 15$ ، $P_1 = 6$

$$D_1 = 10 - 0.5(6) + 0.8(15) + 0.1(100) = 10 - 3 + 12 + 10 = 29$$

ومنه: $E_{p_1}(D_1) = -0.5 \cdot \frac{6}{29} = -0.1$ وهي سالبة دوماً .

2- لحساب مرونة الطلب الدخلية عند النقطة $I = 200$ ، $P_2 = 6$ ، $P_1 = 3$ نجد أن:

$$D_1 = 10 - 0.5(3) + 0.8(6) + 0.1(200) = 10 - 1.5 + 4.8 + 20 = 33.3$$

ومرونة الطلب الدخلية تعطى بالعلاقة التالية:

$$E_I(D) = \frac{\partial D}{\partial I} \cdot \frac{I}{D} = 0.1 \cdot \frac{200}{33.3} = 0.6$$

3-4- مرونة العرض السعرية :

نعرف مرونة العرض السعرية (Price Elasticity of Supply) أو مرونة تابع العرض بالنسبة للسعر بأنها نسبة التغيرات النسبية للكمية المعروضة إلى التغيرات النسبية للسعر، فإذا رمزنا لمرونة العرض السعرية بالرمز $E_P(S)$ فإن:

$$E_P(S) = \frac{\Delta S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{S}$$

إن التغير في الكمية المعروضة ΔS نسبةً إلى التغير في السعر ΔP يكون عادةً موجباً، حيث يبدي المنتج استعداداً لزيادة إنتاج وعرض السلعة عند ارتفاع سعرها،

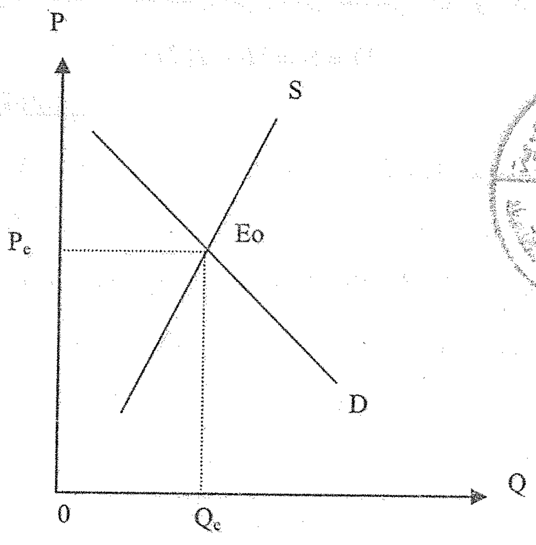
لأن السعر الأعلى يغطي تكاليف الإنتاج المتزايدة ويعطي ربحاً أعلى . وهذا يعني أن العلاقة طردية بينهما ومرونة تابع العرض السعرية $E_P(S)$ موجبة. ويمكن تعريفها بأنها مقياس لدرجة استجابة الكمية المعروضة من سلعة للتغيرات في سعرها.

وتكون مرونة العرض بالنسبة للسعر عند نقطة ما من نقاط التابع معطاة بالعلاقة التالية:

$$E_P(S) = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{S} = S'_P \cdot \frac{P}{S}$$

4-4- توازن السوق :

يتحقق التوازن في السوق (Market Equilibrium) عندما تتساوى الكمية التي يستطيع ويرغب المستهلك شرائها مع الكمية التي يرغب ويستطيع البائع عرضها في السوق بسعر واحد ويسمى بسعر التوازن. هذا وتجدر الإشارة إلى أن المقصود بالتوازن هو الوضع الذي لا يكون هناك عنده أي اتجاه أو رغبة في التغيير سواء من قبل المنتجين أو المستهلكين وذلك بافتراض ثبات العوامل الأخرى المؤثرة.



الشكل رقم (2)

يمثل الشكل أعلاه منحني العرض والطلب لسلعة عادية مفترضين ثبات جميع العوامل المؤثرة في الكمية المطلوبة والكمية المعروضة باستثناء السعر P_e الذي يمثل السعر التوازني في السوق، وهو السعر الذي يحقق التوافق بين رغبات البائعين

والمشترين ، حيث أن الكمية Q_e التي يرغب البائعين في عرضها عند هذا السعر، هي الكمية نفسها Q_e التي يرغب المشترين في طلبها عند هذا السعر نفسه وتعرف بكمية التوازن.

ونجد أن هذا التوازن يتحقق عن طريق تحقيق المساواة بين تابعي العرض S والطلب D أي حين يكون: $D = S$

مثـــال:

بفرض أن لدينا النموذج التالي لتوازن السوق:

$$S = -5 + P \quad ، \quad D = 16 - 2P$$

أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية.

الحـــل: كما نعلم أن شرط توازن السوق هو أن يتحقق: $D = S$ أي:

$$16 - 2P = -5 + P$$

ومنه:

$$3P = 21 \quad \Rightarrow \quad P = 7$$

أما القيمة التوازنية فهي بالتعويض في إحدى علاقتي D أو S نجد:

$$D = S = 16 - 2(7) = 2$$

5-4- المرونة الجزئية للطلب:

نفترض أن لدينا سلعتين x و y وسعر الوحدة من كل منهما على الترتيب P_y , P_x، إذا كان طلب كل منهما يتأثر بسعر السلعة الأخرى، فيمكن حساب مرونة الطلب الجزئية (Partial Elasticity of Demand) لكل منهما بالنسبة لسعر السلعة نفسها وبالنسبة لسعر السلعة الأخرى. فلو فرضنا أن تابعي الطلب هما:

$$D_x = f(P_x, P_y) \quad , \quad D_y = f(P_x, P_y)$$

فإن مرونة الطلب الجزئية للسلعة x بالنسبة لسعرها P_x تساوي:

$$E_{P_x}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_x}$$

وهي تمثل نسبة التغير النسبي للطلب على السلعة x إلى التغير النسبي لسعر السلعة x مع بقاء سعر السلعة y ثابتاً و تكون دائماً سالبة، و بشكل مشابه نجد مرونة الطلب الجزئية للسلعة y بالنسبة لسعرها P_y تساوي:

$$E_{P_y}(D_y)=\frac{\partial D_y}{\partial P_y}\cdot\frac{P_y}{D_y}$$

مثـــال:

إذا كان تابع الطلب على سلعة بالشكل التالي:

$$D_1=10-2P_1+3P_2$$

أوجد المرونات الجزئية بفرض أن: $P_1=0.2$ ، $P_2=1$

الحـــل:

$$E_{p_1}(D_1)=\frac{\partial D_1}{\partial P_1}\cdot\frac{P_1}{D_1}=-2\frac{P_1}{10-2P_1+3P_2}$$

$$E_{p_2}(D_1)=\frac{\partial D_1}{\partial P_2}\cdot\frac{P_2}{D_1}=3\frac{P_2}{10-2P_1+3P_2}$$

1- عندما $P_1=0.2$ ، $P_2=1$ نجد أن :

$$E_{p_1}(D_1)=-0.03$$

هذا يعني أن تزايد P_1 بمقدار 1% (مع ثبات P_2) سيؤدي إلى تناقص الطلب على السلعة (1) بمقدار 0.03%.

2- عندما $P_1=0.2$ ، $P_2=1$ نجد أن:

$$E_{p_2}(D_1)=0.05$$

هذا يعني أن تزايد P_2 بمقدار 1% (مع ثبات P_1) سيؤدي إلى تزايد الطلب على السلعة (1) بمقدار 0.05%.

6-4- مرونة الطلب التقاطعية:

لننتقل الآن إلى نوع آخر من المرونة يتعلق بالسعر وهو مرونة الطلب التقاطعية (Cross Elasticity of Demand) أو مرونة التقاطع بين سلعتين x , y والتي نرمز لها بالرمز $E_{P_y}(D_x)$ أو $E_{P_x}(D_y)$ ، وتسمى التقاطعية لأنها تمثل تقاطع بين سلعتين هما في هذه الحالة السلعة x والسلعة y وهي تبين حساسية أو استجابة الكمية المطلوبة من إحدى السلعتين للتغير الذي قد يحدث في سعر السلعة الثانية. وعليه فمرونة الطلب التقاطعية مقياس إلى مدى ارتباط السلع المختلفة ببعضها البعض.

يمكن تعريف مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين x , y على أنها نسبة التغير في الكمية المطلوبة من السلعة x الناجمة عن تغير سعر السلعة y بنسبة واحد في المائة مع بقاء سعر السلعة x ثابتاً.

إن مرونة الطلب التقاطعية للسلعة x بالنسبة لسعر السلعة y (P_y)تساوي:

$$E_{P_y}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{D_x}$$

وبشكل مشابه نجد مرونة الطلب التقاطعية للسلعة y بالنسبة لسعر السلعة x (P_x) تساوي:

$$E_{P_x}(D_y) = \frac{\partial D_y}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_y}$$

ويمكن أن نميز الحالات التالية:

1- عندما تكون مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين موجبة، فإن ذلك يعني أن ارتفاع سعر السلعة الثانية سيؤدي إلى ارتفاع الكمية المطلوبة من السلعة الأولى عند كل سعر، أي زيادة الطلب على السلعة الأولى.

والعكس في حالة انخفاض السعر، هذا يعني أن السلعتين بديلتان (متنافستان) مثلاً (الموز والتفاح) فإن زيادة سعر الموز ستؤدي إلى زيادة كمية التفاح التي يشتريها المستهلكون، والعلاقة طردية أي أن إحداهما تحل محل الأخرى إذا ارتفع سعر أحداهما أي:

$E_{P_y}(D_x) > 0$ $\quad$ $E_{P_x}(D_y) > 0$ موجبتين

2- أما إذا كانت مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين سالبة فإن ذلك يعني أن ارتفاع سعر السلعة الثانية سيؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة من السلعة الأولى عند كل سعر، أي نقص الطلب على السلعة الأولى ، والعكس في حالة انخفاض السعر. هذا يعني أن السلعتين متكاملتان (مكملتان) لبعضهما البعض مثلاً (الشاي والسكر) ارتفاع سعر أحدهما سيؤدي إلى نقص الكمية المطلوبة على الأخرى، والعلاقة عكسية أي:

$E_{P_y}(D_x) < 0$ $\quad$ $E_{P_x}(D_y) < 0$ سالبتين

3- وأخيراً يمكن أن تكون مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين صفراً. ومعنى ذلك أن ارتفاع أو انخفاض سعر إحدى السلعتين لن يؤدي إلى تغير في الكمية المطلوبة من السلعة الأخرى أي أن السلعتين مستقلتان و لا يمكن أن تحل إحداهما محل الأخرى ولو جزئياً.

$$E_{P_y}(D_x) = E_{P_X}(D_y) = 0$$

تعريف: نقول عن السلعتين x , y أنهما بديلتان (متنافستان) إذ تحقق الشرط التالي:

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_y} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial D_y}{\partial P_x} > 0$$

كما نقول أنهما متكاملتان (مكملتان) إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_y} < 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial D_y}{\partial P_x} < 0$$

أخيراً نقول أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_y} = \frac{\partial D_y}{\partial P_x} = 0$$

مثـــال:

إذا كان لدينا تابع الطلب على السلعة A بالمعادلة الآتية:

$$D_A = -5P_A - P_1 - 2\,P_2 + 3P_3 + 4\,P_4 + 0.1\,I$$

إذا علمت أن:

$I = 100$ ، $P_4 = 8$ ، $P_3 = 6$ ، $P_2 = 10$ ، $P_1 = 4$ ، $P_A = 2$ حيث I الدخل.

1- احسب مرونة الطلب الجزئية وفسر النتيجة ؟

2- احسب مرونة الطلب التقاطعية على السلعة A عند كل سعر وحدد نوع العلاقة بين السلع.

3- احسب مرونة الطلب الدخلية وحدد نوع السلعة وفسر النتيجة ؟

الحـــل:

1- إن مرونة الطلب الجزئية تعطى بالعلاقة:

$$E_{p_A}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} \cdot \frac{P_A}{D_A}$$

لنوجد قيمة D_A :

$$D_A = -5(2) - 4 - 2(10) + 3(6) + 4(8) + 0.1(100) =$$
$$= -10 - 4 - 20 + 18 + 32 + 10 = 26$$

بالتعويض نجد:

$$E_{p_A}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} \cdot \frac{P_A}{D_A} = -5 \cdot \frac{2}{26} = -\frac{10}{26} = -0.385$$

هذا يعني أن تزايد سعر السلعة P_A بمقدار 1% سيؤدي إلى تناقص الكمية المطلوبة من السلعة A بمقدار 0.385% مع ثبات الدخل وأسعار السلع الأخرى.

-2
$$E_{p_1}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{D_A} = -1 \cdot \frac{4}{26} = -\frac{4}{26} = -0.154$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية سالبة هذا يعني أن السلعة الأولى مكملة للسلعة A (مكملتان).

$$E_{p_2}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{D_A} = -2 \cdot \frac{10}{26} = -\frac{20}{26} = -0.769$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية سالبة هذا يعني أن السلعة الثانية مكملة للسلعة A (مكملتان).

$$E_{p_3}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_3} \cdot \frac{P_3}{D_A} = 3 \cdot \frac{6}{26} = \frac{18}{26} = 0.692$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية موجبة هذا يعني أن السلعة الثالثة بديلة للسلعة A (بديلتان).

$$E_{p_4}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_4} \cdot \frac{P_4}{D_A} = 4 \cdot \frac{8}{26} = \frac{32}{26} = 1.231$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية موجبة هذا يعني أن السلعة الرابعة بديلة للسلعة A (بديلتان).

-3
$$E_I(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial I} \cdot \frac{I}{D_A} = 0.1 \cdot \frac{100}{26} = \frac{10}{26} = 0.385$$

بما أن $0 < E_I(D_A) = 0.385 < 1$ فالسلعة عادية ، هذا يعني إذا زاد الدخل بمقدار 1% سيؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبة من السلعة A بمقدار 0.385 % مع ثبات أسعار السلع الأخرى.

مثــــال:

لتكن لدينا توابع الطلب للسلعتين x , y على الترتيب معطاة بالعلاقتين التاليتين :

$$D_x = 5000 - 3P_x^2 - 15P_y^2$$

$$D_y = 4500 - 5P_x^2 - 12P_y^2$$

أوجد توابع الطلب الحدية الأربعة. وحدد فيما إذا كانت السلعتان x , y بديلتين أم متكاملتين.

الحــــل: لدينا:

$$\frac{\partial D_y}{\partial P_y} = -24P_y \text{ ، } \frac{\partial D_y}{\partial P_x} = -10P_x \text{ ، } \quad \frac{\partial D_x}{\partial P_y} = -30P \text{ ، } \frac{\partial D_x}{\partial P_x} = -6P_x$$

بما أن كلاً من P_x و P_y موجب لأنهما تمثلان السعر عندئذ نجد أن:

$$\frac{\partial D_y}{\partial P_x} < 0 \quad , \quad \frac{\partial D_x}{\partial P_y} < 0$$

إذاً السلعتان x , y متكاملتان.

مثــــال:

لنفرض أنه لدينا تابعي الطلب للسلعتين x , y هي:

$$D_x = \frac{a}{P_x^{\ 2} P_y} \qquad , \quad D_y = \frac{a}{P_x\ P_y}$$

حيث P_x تمثل سعر السلعة x ، P_y تمثل سعر السلعة y , a مقدار ثابت موجب.

احسب المرونات الجزئية والتقاطعية.

الحــــل: إن المرونات الجزئية هي:

$$E_{p_x}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_x} = \frac{-2a P_x P_y}{(P_x^{\ 2} P_y)^2} \cdot \frac{P_x}{\dfrac{a}{P_x^{\ 2} P_y}} = \frac{-2a P_x^{\ 4} P_y^{\ 2}}{a P_x^{\ 4} P_y^{\ 2}} = -2$$

$$E_{p_y}(D_y) = \frac{\partial D_y}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{D_y} = \frac{-a P_x}{(P_x P_y)^2} \cdot \frac{P_y}{\dfrac{a}{P_x P_y}} = \frac{-a P_x^{\ 2} P_y^{\ 2}}{a P_x^{\ 2} P_y^{\ 2}} = -1$$

والمرونات التقاطعية هي:

$$E_{p_y}(D_x)=\frac{\partial D_x}{\partial P_y}\cdot\frac{P_y}{D_x}=\frac{-a\,P_x{}^2}{(P_x{}^2P_y)^2}\cdot\frac{P_y}{\frac{a}{P_x{}^2P_y}}=\frac{-a\,P_x{}^4P_y{}^2}{a\,P_x{}^4P_y{}^2}=-1$$

$$E_{p_x}(D_y)=\frac{\partial D_y}{\partial P_y}\cdot\frac{P_x}{D_y}=\frac{-a\,P_y}{(P_xP_y)^2}\cdot\frac{P_x}{\frac{a}{P_xP_y}}=\frac{-a\,P_x{}^2P_y{}^2}{a\,P_x{}^2P_y{}^2}=-1$$

مثـــال:

لتكن لدينا توابع الطلب للسلعتين x وy على الترتيب معطاة بالعلاقتين التاليتين:

$$D_x=4500-4P_x^2+12P_y$$

$$D_y=6000+5P_x-3P_y^2$$

المطلوب:

1- أوجد المرونة الجزئية للطلب على السلعة x عندما $P_y=10\ \&\ P_x=25$.

2- أوجد المرونة التقاطعية للطلب على السلعة x بالنسبة لـ P_y عندما $P_x=25$ و $P_y=10$.

3- أوجد المرونة التقاطعية للطلب على السلعة y بالنسبة لـ P_x عندما $P_x=25$ و $P_y=10$.

الحل: 1- حسب تعريف المرونة الجزئية للطلب على السلعة x نكتب:

$$E_{p_x}(D_x)=\frac{\partial D_x}{\partial P_x}\cdot\frac{P_x}{D_x}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_x}=-8P_x=-8(25)=-200$$

$$D_x=4500-4(25)^2+12(10)=2120$$

بالتعويض نجد:
$$E_{p_x}(D_x)=-200\cdot\frac{25}{2120}=-2.36$$

بناءً على ذلك إذا بقي سعر السلعة y ثابتاً وتغير سعر السلعة x بمقدار 1% فإن معدل التغير في الطلب على السلعة x سيكون 2.36% بالاتجاه المعاكس وبتغير سالب دائماً.

2- تعطى المرونة التقاطعية للطلب على السلعة x بالنسبة لـ P_y كما يلي:

$$E_{p_y}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{D_y}$$

بالتعويض نجد أن: $\frac{\partial D_x}{\partial P_y} = 12$ ، $D_x = 2120$

ومنه فإن: $E_{p_y}(D_x) = 12 \cdot \frac{10}{2120} = 0.057$

أي إذا بقي سعر السلعة x ثابتاً وتغير سعر السلعة y بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة x سوف يتغير بمقدار 0.057% بالاتجاه نفسه.

3- أما المرونة التقاطعية للطلب على السلعة y بالنسبة لـ P_x فهي:

$$E_{p_x}(D_y) = \frac{\partial D_y}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_y}$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial P_x} = 5$$

$$D_y = 6000 + 5(25) - 3(10)^2 = 5825$$

$$E_{p_x}(D_y) = 5 \cdot \frac{25}{5825} = 0.021$$

نلاحظ أنه إذا بقي سعر السلعة y ثابتاً وتغير سعر السلعة x بمقدار 1% سوف يسبب تغير في الطلب على السلعة y بمقدار 0.021% بنفس الاتجاه.

مثـــال : بفرض أن تابع الطلب على السلعة A يعطى بالعلاقة التالية:

$$D_A = -2P_A^2\sqrt{P_B^3} + 5P_B^{-3} + 10$$

حيث P_A سعر السلعة A و P_B سعر السلعة البديلة B. فإذا علمت أن سعري التوازن هي $P_A = 2$ و $P_B = 1$. المطلوب:

1- احسب مرونة الطلب الجزئية على السلعة A عند وضع التوازن وفسر النتيجة.

2- احسب مرونة الطلب التقاطعية على السلعة A عند وضع التوازن وفسر النتيجة.

3- أوجد مقدار التغير (dD_A) الذي طرأ على تابع الطلب D_A بالنسبة للسلعة A المدروسة عندما يتزايد P_A بمقدار 0.02 وأن P_B يتناقص بمقدار 0.03 وذلك اعتباراً من وضع التوازن، وفسر النتيجة.

4- أوجد (d^2D_A) عندما يتزايد P_A بمقدار 0.01 و P_B بمقدار 0.02 وذلك اعتباراً من وضع التوازن.

الحـــل :

1 – إن مرونة الطلب الجزئية على السلعة A بالنسبة لسعرها هي:

$$E_{P_A}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} \cdot \frac{P_A}{D_A} = -4P_A\sqrt{P_B^3} \cdot \frac{P_A}{-2P_A^2\sqrt{P_B^3} + 5P_B^{-3} + 10}$$

$$E_{P_A}(D_A) = \frac{-4(2)^2\sqrt{(1)^3}}{-2(2)^2\sqrt{(1)^3} + 5(1)^{-3} + 10} = \frac{-16}{-8+5+10} = -\frac{16}{7} = -2.29$$

هذا يعني أن تزايد سعر السلعة A بمقدار 1% مع ثبات سعر السلعة B سيؤدي إلى انخفاض الطلب على السلعة A بمقدار 2.29% .

2 – أما المرونة التقاطعية لتابع الطلب على السلعة A بالنسبة لسعر السلعة B فهي:

$$E_{P_B}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_B} \cdot \frac{P_B}{D_A} = \frac{(-3P_A^2\sqrt{P_B} - 15P_B^{-4})P_B}{-2P_A^2\sqrt{P_A^3} + 5P_B^{-3} + 10}$$

$$= \frac{-3(2)^2\sqrt{(1)} - 15(1)^{-4}(1)}{7} = \frac{-27}{7} = -3.86$$

هذا يعني أن تزايد سعر السلعة B بمقدار 1% مع ثبات سعر السلعة A سيؤدي إلى انخفاض الطلب على السلعة A بمقدار 3.86 % أي أن الطلب علـــى الـــسلعة A يتأثر بارتفاع سعر السلعة B .

3 – إن التغير الذي طرأ على تابع الطلب D_A بالنسبة للـــسلعة A يعطـــى بالتفاضـــل الكلي:

$$dD_A = \frac{\partial D_A}{\partial P_A}dP_A + \frac{\partial D_A}{\partial P_B}dP_B \qquad (1)$$

لنحسب المشتقات الجزئية: ونعوض عندما: $P_B = 1 \ , \ P_A = 2$

$$\frac{\partial D_A}{\partial P_A} = -4P_A\sqrt{P_B^3} = -4(2)\sqrt{(1)^3} = -8$$

$$\frac{\partial D_A}{\partial P_B} = -2P_A^2(\frac{3}{2}\sqrt{P_B}) - 15P_B^{-4} =$$

$$= -2(2)^2(\frac{3}{2}\sqrt{1}) - 15(1)^{-4} = -12 - 15 = -27$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$\mathrm{dD_A} = -8(0.02) + (-27)(-0.03) = -0.16 + 0.81 = 0.65$$

وهذا يعني أن التغير الذي حصل على سعر السلعة A وكذلك سعر السلعة B قد أدى في المحصلة إلى زيادة الطلب على السلعة A بمقدار 0.65.

4 – إن (d^2D_A) هو التفاضل الكلي من المرتبة الثانية ويعطى بالعلاقة التالية:

$$d^2D_A = \frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A^2} dP_A^2 + 2\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A \partial P_B} dP_A dP_B + \frac{\partial^2 D_A}{\partial P_B^2} dP_B^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A^2} = -4\sqrt{P_B^3} = -4\sqrt{(1)^3} = -4$$

$$\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A \partial P_B} = -4P_A(\frac{3}{2}\sqrt{P_B}) = -4(2)\frac{3}{2}\sqrt{1} = -12$$

$$\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_B^2} = -2P_A^2(\frac{3}{4\sqrt{P_B}}) + 60P_B^{-5} = -2(2)^2\frac{3}{4\sqrt{1}} + 60(1)^{-5} = -6 + 60 = 54$$

وبالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$d^2D_A = -4(0.01)^2 + (-12)(0.01)(0.02) + (54)(0.02)^2$$

$$= -0.0004 - 0.0024 + 0.0216 = 0.0188$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- لنفرض أن موظفاً يتقاضى راتباً شهرياً قدره 3000 ل.س و هو ينفق راتبه كما يلي 50% على المواد الغذائية ، 10% على السكن و التدفئة 15% للكساء و 25% للمصاريف المتفرقة . ولنفترض أن راتب هذا الموظف ازداد 10% مع بقاء الأسعار ثابتة وأن معاملات مرونة طلبه بالنسبة لراتبه على فئات الإنفاق المذكورة هي كما يلي 0.5 بالنسبة للمواد الغذائية 0 بالنسبة للسكن 0.8 بالنسبة للكساء 1 للمصاريف المتفرقة.

المطلوب: احسب معامل مرونة الطلب الكلي لهذا الموظف بعد زيادة راتبه.

2 – ليكن لدينا تابع الطلب للسلعة x التالي:

$$D_x = -5P_x^2\sqrt{P_y} + \frac{3}{\sqrt{P_y}} + 500$$

حيث P_x تعبر عن سعر الوحدة الواحدة من السلعة x و P_y تعبر عن سعر الوحدة الواحدة من السلعة y **والمطلوب:**

1- أوجد المرونة الجزئية للطلب على السلعة x عندما يكون $P_x = 5$ ، $P_y = 9$.

2- أوجد المرونة التقاطعية للطلب على السلعة x عندما يكون $P_x = 5$ ، $P_y = 9$.

3- أوجد dD_x مقدار التغير في الطلب على السلعة x عندما يتزايد P_x بمقدار 0.01 و P_y بمقدار 0.02 ، حيث $P_x = 5$ و $P_y = 9$.

4- أوجد d^2D_x عندما يتزايد P_x بمقدار 0.01 و P_y بمقدار 0.02 .

3 – أفادت إحصائيات عام 2000 لإحدى الدول أن دخلها القومي بلغ (48) ألف مليون وحدة نقدية وأن عدد سكانها يبلغ (12) مليون نسمة. فإذا كان دخل الفرد الواحد يستهلك سنوياً ما مقداره (100) كغ من السلعة A . وبفرض أن تنبؤات عام 2001 تفيد ما يلي:

1 – عدد السكان سيبلغ (13.2) مليون نسمة.

2 – الدخل السنوي للفرد الواحد سيزداد بمعدل 20%.

3 – أسعار السلعة A ستتغير من 20 وحدة نقدية إلى 23 وحدة نقدية.

فما هي الكميات الواجب توفرها في الأسواق بالعام القادم من هذه السلعة بأخذ تغيرات الدخل والأسعار معاً. علماً أن مرونة الطلب على الاستهلاك بالنسبة للدخل الفردي (1.5) ومرونة الطلب على الاستهلاك بالنسبة لسعر السلعة (2–) (فسر النتائج اقتصاديا).

4 – قامت المؤسسة العامة للمنتجات النسيجية بدراسة مرونة الطلب على الأقمشة القطنية بالنسبة للسعر فوجدت قيمتها هي (4–) علماً أن سعر الوحدة من هذه السلعة هو (20) وحدة نقدية، وقدر متوسط استهلاك الفرد من الأقمشة القطنية سنوياً بمقدار (5) وحدات. فإذا علمت أن عدد السكان في العام الحالي هو (6) مليون نسمة وإن نسبة نمو السكان (7%)ويتوقع للدخل الفردي أن يزداد بمقدار (2%)فإذا قررت الشركة تخفيض سعر الوحدة إلى (18) وحدة نقدية وكان معامل مرونة الطلب بالنسبة للدخل هو (2.5).

المطلوب: أحسب حجم وقيمة الطلب في العام القادم.

5 – يتحدد الطلب على السلعتين A , B بالتابعين التاليين:

$$D_A = 35 - 2P_A + P_B$$

$$D_B = 5 + 0.5P_A - P_B$$

حيث P_A سعر الوحدة من السلعة A ويساوي 10 وحدات نقدية أما P_B فهو سعر الوحدة الواحدة من B و يساوي 5 وحدات نقدية. و**المطلوب:**

1– إيجاد مرونة الطلب على السلعة A بالنسبة لسعرها وفسر النتائج.

2– إيجاد المرونة التقاطعية للطلب على السلعة B وفسر النتائج.

6 – لنفرض أن الطلب على سلعة يرتبط بسعرها وفق العلاقة:

$$P = \frac{600}{Q+20}$$

حيث P سعر السلعة . Q تمثل عدد الوحدات المطلوبة. و**المطلوب:**

1– دراسة كيفية تغير الإيراد بتغير الطلب.

2– إيجاد الخطأ المطلق المرتكب عندما يتغير الطلب من 5 وحدات إلى 5.01 .

3– تقدير مرونة الإيراد بالنسبة للطلب عند النقطة $Q = 5$ وتفسير النتائج.

تذكير بأهم أساسيات
المصفوفات والمعينات وحلول جمل المعادلات

نستعرض في هذا الملحق تلخيصاً وتذكيراً ببعض المواضيع الرياضية التي كان القارئ قد درسها سابقاً، وذلك لسببين:

الأول: تشكل هذه المواضيع بعضاً من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة على صعيد النماذج الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية .

الثاني: وضع هذه الأدوات بمتناول يد القارئ في هذا الكتاب بهدف التسهيل والعودة إليها في أي لحظة.

§-1- أنواع المصفوفات والعمليات عليها:

1-1- مفهوم المصفوفة وأشكالها:

المصفوفة A ، كما عرفت سابقاً، هي مجموعة عناصر (أعداد) a_{ij} مرتبة في أسطر، حيث $i=1,2,...,m$ وأعمدة، حيث $j=1,2,...,n$ وموضوعة ضمن قوسين، مثال المصفوفة التالية:

$$A_{m.n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يشير الرمز $m \cdot n$ في $A_{m.n}$ لما نسميه مرتبة (سعة) المصفوفة، حيث يدل m على عدد الأسطر و n على عدد الأعمدة فيها. كما يشير الدليلان i,j في a_{ij} إلى موقع العنصر a_{ij} حيث يدل i على رقم السطر ويدل j على رقم العمود. نذكر فيما يلي بأغلب الأشكال المعروفة للمصفوفة:

1- مصفوفة سطر (صف): هي مصفوفة من المرتبة $m \cdot n=1,n$. عناصرها تتوضع على سطر واحد و n عمود.

2- مصفوفة عمود: هي من المرتبة $m \cdot n=m,1$ عناصرها تتوضع في عمود واحد و m سطر.

3- مصفوفة العنصر الوحيد: هي مصفوفة من المرتبة $m \cdot n=1,1$ مثال: $A=[a]$.

4- المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة من المرتبة $m \cdot n$ جميع عناصرها مساوية للصفر، وغالباً ما تكتب على الشكل $A_{m.n} = 0$.

5- المصفوفة المستطيلة: هي مصفوفة من المرتبة $m \cdot n$ حيث: $m \neq n$، أي أن عدد الأسطر يختلف عن عدد الأعمدة.

6- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة من المرتبة $n \cdot n$ أو $m \cdot n$ وعموماً نقول أن لدينا مصفوفة مربعة من المرتبة n ونكتب A_n أي أنها مصفوفة من المرتبة $n \cdot n$.

نشير هنا أننا إذا كنا أمام مصفوفة مربعة فيمكننا الحديث عما يسمى بالقطر الرئيسي للمصفوفة. إن عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة B مربعة هي $b_{11}, b_{22}, ..., b_{nn}$ وهي العناصر الواقعة على المستقيم الوهمي الواصل ما بين b_{11} و b_{nn} . ونلفت الانتباه أيضاً إلى أن الحديث عن عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة يعني ضمناً أن المصفوفة المذكورة هي مصفوفة مربعة.

7- المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة حتماً. فيها جميع العناصر غير القطرية مساوية للصفر.

8- المصفوفة السلمية (العددية): هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية، فهي إذن حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

9- المصفوفة الواحدة: هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي مساوية للواحد الموجب الصحيح. يرمز لها بالرمز I . فهي إذن حالة خاصة جداً من المصفوفة القطرية.

10- المصفوفة المثلثة: هي مصفوفة مربعة جميع العناصر الواقعة أعلى القطر الرئيسي أو تحته مساوية للصفر.

11- المصفوفة المتناظرة: هي مصفوفة مربعة يتحقق فيها $a_{ij} = a_{ji}$. وتكون المصفوفة متناظرة عكسيا إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ وذلك من أجل جميع عناصرها باستثناء عناصر القطر الرئيسي فيها.

2-1- العمليات على المصفوفات:

1- عملية المساواة:

نقول عن المصفوفتين A و B أنهما متساويتان ونكتب $A=B$ إذا كانت لهما المرتبة نفسها $m \cdot n$ وكانت جميع عناصرهما المتقابلة، أي الواقعة الموقع نفسه ij متساوية، أي إذا كانت إحداهما صورة طبق الأصل عن الثانية.

2- عملية جمع المصفوفات:

يمكن جمع المصفوفات مع بعضها إذا كانت جميعها من المرتبة نفسها ، ويتم ذلك بجمع العناصر المتقابلة في تلك المصفوفات. ونلاحظ هنا أن عملية جمع مصفوفتين A و B هي عملية تبديلية أي: $A+B=B+A$.

3- عملية طرح المصفوفات:

يمكن طرح مصفوفة B من أخرى A ونكتب $A-B$ إذا كانت المصفوفتان من المرتبة نفسها. ويتم ذلك بطرح العناصر المتقابلة في الموقع ij من بعضها ، أي b_{ij} من a_{ij} . ونلاحظ هنا أن عملية الطرح ليست عملية تبديلية.

ملاحظة: إذا لم تكن المصفوفات من نفس المرتبة $m \cdot n$ تصبح عمليتا الجمع والطرح عليها غير معرفة.

4- عملية ضرب المصفوفة بثابت:

هنا يتم ضرب الثابت λ بكل عنصر من عناصر المصفوفة المعنية.

كأمثلة توضيحية على العمليات السابقة نأخذ:

$$\lambda = 3 \qquad \text{وليكن} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

حسب تعريف العمليات الجبرية أعلاه لدينا:

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن: $A+B=B+A$

وكذلك لدينا

$$A-B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B-A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن: $A - B \neq B - A$

أما فيما يخص عملية ضرب المصفوفة بثابت، فهي موضحة على الشكل التالي:

$$\lambda A = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

5- عملية ضرب المصفوفات:

تذكّر أن عملية ضرب المصفوفتين الأولى A في الثانية B ينتج عنها مصفوفة C قيمة كل عنصر فيها c_{ij} عبارة عن مجموع نواتج ضرب عناصر السطر i من الأولى بعناصر العمود j من الثانية. أي ضرب عناصر سطر i من الأولى بعناصر عمود j من الثانية يتم كما في المثال التالي:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3) + 5(2) + (-2)(-1) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}$$

لكي تكون عملية الضرب معرّفة يشترط أن يكون عدد أعمدة الأولى مساوياً لعدد أسطر الثانية. كما نذكّر هنا أن عملية ضرب المصفوفات ببعضها هي عملية ليست تبديلية. فمثلاً دعنا نوجد مصفوفة ناتج الضرب التالي:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

مع ملاحظة أن عملية الضرب $A.B$ ممكنة نجد:

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -9 & -7 & -5 \\ 12 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

بينما نجد:

$$B.A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

من الواضح أن عملية الضرب غير تبديلية حيث وجدنا: $A.B \neq B.A$ وهـذا لا يعني طبعاً عدم وجود حالات خاصة تكون فيها عملية ضرب المصفوفات تبديلية.

لنورد الآن بعض الملاحظات الهامة:

- المصفوفة الصفرية: ونرمز لها بالرمز 0 هي مصفوفة حيادية في الجمع. أي:

$$0 + A = A$$

- المصفوفة الواحدة: التي هي حالة خاصة من السلمية، هي حيادية في الـضرب، أي:

$$I \cdot A = A$$

كما أن عملية ضرب المصفوفة الواحدة بمصفوفة أخرى A هي عملية تبديلية:

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

- ضرب مصفوفة مربعة بمصفوفة سلمية هي عملية تبديلية.

لتكن لدينا المصفوفة السلمية λ والمصفوفة B التاليتين:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

لنأخذ λB و $B\lambda$:

$$\lambda B = B\lambda = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن عملية الضرب هنا هي عملية تبديلية. كما نلاحظ أيـضاً أن عمليـة ضرب المصفوفة B بالمصفوفة السلمية λ، والتي قيمة كل عنصر قطري فيها يساوي 2 ، هي عملية تكافئ عملية ضرب المصفوفة B المعطاة بالعدد 2 :

$$2 \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

بهذا، يمكن القول أن المصفوفة السلمية والتي قيمة كل عنصر قطري فيهـا α مثلاً لها عدد حقيقي يقابلها في مجموعة الأعداد الحقيقية وهو العـدد α. كمـا يمكـن القول أيضاً أن كل عدد حقيقي كالعدد α يقابله بلغة المصفوفات المـصفوفة الـسلمية αI. ويظهر ذلك جلياً من خلال المثال التالي:

مثـــال 1:

ليكن لديك كثير الحدود التالي: $f(x)=3x^2-2x+7$

ولتكن لديك المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

والمطلوب إيجاد $f(A)$.

من أجل إيجاد $f(A)$ يلزم إحلال A محل كل x في $f(x)$. ونصبح أمام ما يسمى بكثير الحدود للمصفوفة A : $f(A)=3A^2-2A+7$ ، الذي لا يسمح لنا بإجراء عمليات الجمع بسبب عدم إمكانية جمع عدد إلى مصفوفة. ولكن بما أن العدد الحقيقي 7 يقابل بالمصفوفة $7I$. يكون لدينا:

$$\mathrm{f(A)=3A^2-2A+7I}$$

$$\mathrm{f(A)}=3\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 11\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}18 & 4\\ 8 & 34\end{bmatrix}$$

§-2- المعينات

كما نعلم، يربط بكل مصفوفة مربعة A عدد a خاص بها يسمى معين المصفوفة A ، ويكتب $|A|$ أو $\det A$. نذكر فيما يلي بأهم طرق حساب قيمة المعين وبأهم الخصائص التي تساعدنا في التعامل مع المعينات ذات المراتب العليا.

1-2 حساب قيمة المعين :

إذا كان المعين لمصفوفة العنصر الوحيد فقيمة المعين تساوي لقيمة ذلك العنصر الوحيد.

مثـــال 2:

$$|A|=|-3|=-3$$

إذا كان المعين لمصفوفة من المرتبة الثانية ، فتحسب قيمته كالتالي:

$$\begin{vmatrix}\mathrm{a} & \mathrm{b}\\ \mathrm{c} & \mathrm{d}\end{vmatrix}=\mathrm{ad-cb}$$

مثـــال 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 2(4) = -5$$

إذا كان المعين لمصفوفة من المرتبة الثالثة أو أكثر فهناك العديد مـــن الطـــرق لحساب قيمته. نعرض منها هنا ، وعلى سبيل التذكير، طريقة (**Sarrus**) الخاصـــة فقط بمعينات المرتبة الثالثة والطريقة العامة التي يطلق عليها أحياناً طريقـــة الفـــك أو أيضاً طريقة النشر.

الطريقة الخاصة بمعينات المرتبة الثالثة:

فيها يضاف العمود الأول والعمود الثاني على الترتيب إلى يمين المعين المعطى، كما يلي:

$$0+1+8=9=S$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right.$$

$$6-2+0=4=T$$

ثم ننشئ ثلاثة أسهم قطرية هابطة وثلاثة أسهم قطرية صاعدة كما فـــي الـــشكل أعلاه . نضرب العناصر الواقعة على كل سهم ببعضها ونجمع نتائج الضرب بالطريقة المبينة في الشكل ونحصل على قيمة المعين $|A|$ بالتالي:

$$|A| = T - S$$

$$|A| = 4 - 9 = -5$$

الطريقة العامة: طريقة النشر.

وهي طريقة تصلح لحساب قيم معينات المرتبة الثالثة فأكثر. في هذه الطريقة يتم حساب قيمة المعين المعطى كمايلي :

- أولا بنشره بالنسبة لأحد أسطره فقط أو أحد أعمدته فقط وذلك بأخذ قيمة كل عنصر نودّ النشر بالنسبة لسطره أو عموده، مسبوقاً بإشارة جبرية محسوبة من $(-1)^{i+j}$ وضربه بالصغير (المعين) المتبقي بعد حذف سطر وعمود العنصر المعتبر.
- وثانياً بجمع الحدود الناتجة عن أولاً.

مثـــال 4:

احسب قيمة المعين السابق المعطى وذلك بالطريقة العامة.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$|A| = (-1)^2(1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3(2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^6(0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 5 - 10 + 0 = -5$$

نلاحظ هنا أن عملية النشر بالنسبة للسطر أو العمود الذي يحوي أكبر عدد من العناصر الصفرية يسهل عملية الحساب.

2-2 خصائص المعينات:

نعرض هنا أهم خصائص المعينات التي تساعدنا كثيراً في إجراء العمليات الحسابية عليها وإيجاد قيمها بسرعة، ولنتذكر دائماً أن الحديث عن معين مصفوفة يعني أن المصفوفة هي حتماً مصفوفة مربعة .

1- إذا كانت جميع عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة أصفاراً فإن قيمة المعين تساوي الصفر .

2- إذا نتج $|B|$ عن $|A|$ بعملية تبديل بين موقعي سطرين (أو عمودين) فإن :

$$|A| = -|B|$$

3- إذا نتج $|B|$ عن $|A|$ بضرب أحد أسطر (أو أحد أعمدة) $|A|$ بعدد k ثابت فإن:

$$|B| = k\ |A|$$

4- إذا كانت A مصفوفة قطريه أو مثلثية فقيمه معينها تساوي إلى ناتج ضرب عناصر القطر الرئيسي ببعضها البعض . وينتج عن ذلك أن:

معين المصفوفة الواحدة : $|I_n| = 1$

وإذا كانت المصفوفة A سلمية عناصر القطر الرئيسي فيها a فيكون:

$|A| = a^n$ ، حيث n مرتبة المصفوفة السلمية .

5- إذا نتج المعين $|B|$ عن المعين $|A|$ بضرب أحد أسطر $|A|$ (أو أحد أعمدته) بعدد k ثابت وأضفنا الناتج إلى سطر آخر (عمود آخر) فقيمة المعين لا تتغير :

$$|A| = |B|$$

مثلاً العملية التالية: $kC_3 + C_5 \to C_5$

تعني ضرب السطر الثالث بالعدد k وإضافة الناتج على الترتيب إلى السطر الخامس ووضع الناتج الأخير بدلاً عن عناصر السطر الخامس السابق . أما السطر الثالث فتبقى عناصره كما كانت عليه قبل الضرب بـ k. هذه الخاصة تفيد في إظهار أصفار كثيرة يسهل معها حساب قيمة المعين المعطى.

مثال 5:

أوجد قيمة معين المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ أن ثلاثة عناصر من السطر الأول تنتج عن ضرب عناصر السطر الثاني بـ 2 . إذن، من أجل إظهار الأصفار في السطر الأول يمكن ضرب عناصر السطر الثاني C_2 بـ 2 − وإضافة الناتج إلى عناصر السطر الأول C_1 ووضع الناتج الأخير في C_1 علماً أن هذه العملية لا تغير قيمة $|A|$. فيكون بتطبيق:

$$-2C_2 + C_1 \to C_1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -13 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ولحساب قيمة $|A|$ نستخدم النشر بالنسبة للسطر الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار وهو السطر الأول:

$$|A| = -(-13)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-13)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -130$$

أما الخاصتان التاليتان فتنتجان في الحقيقة عن الخاصة الخامسة.

1- إذا تساوت عناصر سطرين ما (أو عمودين ما) في A فإن $|A| = 0$.

2- إذا كان في A عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) من مضاعفات سطر آخر (عمود آخر) فإن $|A| = 0$.

§-3- عمليات التحويل البسيطة ومعكوس المصفوفة

1-3 عمليات التحويل البسيطة على المصفوفات:

يطلق على العمليات التالية عمليات التحويل البسيطة:

أ- ضرب كل عنصر من عناصر السطر i بثابت k حيث $k \neq 0$. سنرمز لهذه العملية بالرمز $C_i(k)$.

ب- التبديل بين موضعي السطرين i و j. نرمز لهذه العملية بالرمز C_{ij} .

ح- ضرب عناصر السطر j بـ k مرة وإضافة العناصر الناتجة إلى عناصر السطر i وإحلال الناتج محل عناصر السطر i . نرمز لهذه العملية بالرمز $C_{ij}(k)$.

كنا قد ذكرنا هذه العمليات أعلاه عندما تحدثنا عن خصائص المعينات، حيث رأينا أن العملية الأولى تضاعف من قيمة معين المصفوفة k مرة، وأن العملية الثانية تغير فقط الإشارة الجبرية لقيمة المعين، أما العملية الثالثة فلا تغير شيئاً في قيمته.

مثال 6:

طبّق على المصفوفة A أدناه:

1 - $C_{21}(-2)$ و C_{23} على ناتج الطلب الأول، إذا أعطيت المصفوفة كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

الحـــل: 1- العملية الأولى $C_{21}(-2)$ تعني ضرب السطر الأول بـــــ -2 وإضـــافة الناتج للسطر الثاني وإحلال الناتج الأخير محل عناصر السطر الثـــاني وتكـــون لـــدينا المصفوفة الجديدة B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2- العملية C_{23} تعني إحلال السطر الثاني محل الثالث وإحلال السطر الثالـــث محـــل الثاني ونحصل على المصفوفة :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-3 تعاريف وتسميات أخرى في المصفوفات

1- المصفوفة النظامية والمصفوفة الشاذة: نقول عن مصفوفة مربعة A أنها نظاميـــه إذا كانت قيمة معينها لا تساوي الصفر. بخلاف ذلك تكون المصفوفة شاذة.

2- منقول مصفوفة: إن منقول مصفوفة A من المرتبة $m \cdot n$ هو مصفوفة من المرتبـــة $m \cdot n$، نحصل عليها بتبديل الأسطر بالأعمدة (الأعمدة بالأسطر)، فنضع الســـطر الأول عموداً أولاً ونضع السطر الثاني عموداً ثانياً وهكذا الخ. نرمـــز لمنقـــول A بالرمز A^t ونلاحظ أن: $|A| = |A^t|$

1- صغير عنصر في مصفوفة مربعة: صغير عنصر ما a_{ij} في مصفوفة مربعة هـــو بالتعريف المعين الناتج بعد حذف السطر i والعمود j المتعلقين بهذا العنصر. نرمز لهذا الصغير بالرمز Δ_{ij}.

2- المتمم الجبري للعنصر a_{ij} في معين A.

نرمز له بالرمز A_{ij} ويعرف بالعلاقة : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

3- صغار مصفوفة: لتكن لدينا مصفوفة A من المرتبة $m \cdot n$، لننشئ مستقيمين أفقيين يمران من سطرين ما ومستقيمين يمران على طول عمودين ما منها، نـــشكل مـــن العناصر الواقعة على نقاط تقاطع المستقيمات، وبنفس ترتيب وقوعها، معينا نسميه

صغير المصفوفة A وهو في مثالنا هنا من المرتبة الثانية. ولو أخذنا عناصر تقاطع ثلاثة أسطر مع ثلاثة أعمدة لحصلنا على صغير لـ A من المرتبة الثالثة، وهكذا الخ، فإذا كان $m \neq n$ فإن أكبر مرتبة لصغير لا يمكن أن تتجاوز أصغرهما.

4- رتبة مصفوفة A: يرمز لها بالرمز $r(A)$ وهي بالتعريف أعلى مرتبة لصغير واحد على الأقل تختلف قيمته عن الصفر. فإذا قلنا أن رتبة مصفوفة معطاة هي الثانية $r(A) = 2$

فنفهم من ذلك أن جميع الصغار الممكنة التشكيل من المرتبة الثالثة فأعلى هي ذات قيم صفرية وأن هناك معيناً واحداً على الأقل من المرتبة الثانية قيمته لا تساوي الصفر.

5- المصفوفات المتكافئة: نقول عن مصفوفتين A و B أنهما متكافئتان إذا نتجت إحداهما عن الأخرى بتطبيق واحدة أو أكثر من عمليات التحويل البسيطة ونكتب $A \sim B$. ونشير هنا أن للمصفوفات المتكافئة نفس الرتبة r.

6- المصفوفة المرافقة (المساعدة): لتكن A مصفوفة مربعة. يرمز للمصفوفة المرافقة لـ A بالرمز $\Gamma(A)$ أو أحياناً $\tilde{A}$ ويتم الحصول عليها بخطوتين:

أولاً: إحلال المتمم الجبري للعنصر a_{ij} محل العنصر a_{ij} نفسه وذلك من أجل جميع العناصر a_{ij}.

ثانياً: أخذ منقول مصفوفة المتممات الجبرية.

مع ملاحظة إمكانية تطبيق الخطوة الثانية كخطوة أولى ، أي يمكن أخذ منقول A أولاً ومن ثم إحلال المتممات الجبرية لعناصر المنقول محل عناصر المنقول.

المصفوفة المرافقة في الحقيقة، ترافق أو تساعد في الحصول على ما يسمى معكوس مصفوفة نظامية وتتميز المرافقة بخصائص عديدة من أهمها أن:

$$\Gamma(A).A = A \cdot \Gamma(A) = |A|\, I$$

أي أن عملية الضرب بين المصفوفة ومرافقتها هي عملية تبديلية وناتجها مصفوفة سلمية مرتبتها من مرتبة A ، كما أن عناصر القطر الرئيسي متساوية

ومساوية لقيمة معين المصفوفة A . أما إذا لم تكن A نظامية فيكون ناتج الضرب مصفوفة صفرية .

3-3 مقلوب مصفوفة:

1 – تعريف:

إذا كانت A مصفوفة مربعة نظامية فإن مقلوبها موجود ووحيد وهو مصفوفة مربعة يرمز لها بالرمز A^{-1} ويكون: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

أي أن عملية الضرب بين مصفوفة نظامية ومقلوبها (معكوسها) هي عملية تبديلية وناتج الضرب هو حتماً مصفوفة واحدية.

2 – إيجاد مقلوب مصفوفة نظامية:

هناك العديد من الطرق التي تسمح لنا بإيجاد مقلوب مصفوفة، إلا أننا سنقتصر هنا على التذكير بطريقتين. الأولى يمكن أن تستخدم في حالة كون مرتبة المصفوفة غير كبيرة والثانية تستخدم عادة من أجل مراتب عالية.

أ- المقلوب عن طريق المرافقة:

إذا كانت A مصفوفة نظامية فمقلوبها موجود ووحيد ويعطى بالعلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Gamma(A)$$

وعادة نحسب قيمة $|A|$ قبل البدء بإيجاد $\Gamma(A)$ وذلك للتأكد أولاً من وجود A^{-1}. فإذا كان $|A| = 0$ فمقلوب A غير موجود ولا داعي إذن للبحث عنه.

ب- المقلوب بطريقة جوردان :

تعتمد هذه الطريقة على استخدام عمليات التحويلات البسيطة على المصفوفات. إذا كانت A مصفوفة نظامية نشكل المصفوفة $[A | I]$. أي نضيف مصفوفة واحدية مرتبتها من مرتبة A إلى يمين عناصر A، ثم باستخدام عمليات التحويل البسيطة على الأسطر فقط ، نحول المصفوفة A في $[A | I]$ إلى مصفوفة واحدية ، فتتحول عندها المصفوفة I إلى A^{-1} . أي:

$$[A | I] \xrightarrow{\text{الأسطر}} [I | A^{-1}]$$

مثـــال 7:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

أوجد A^{-1} ، أولاً عن طريق المرافقة وثانيا بطريقة جوردان:

الحــل: أولاً: المقلوب عن طريق المرافقة:

لدينا القانون $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\Gamma(A)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=4\neq 0$$

إذن المصفوفة A نظامية ولها مقلوب موجود. نوجد المنقول A^t والمرافقة $\Gamma(A)$.

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Gamma(A)=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\ 4 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

وبتطبيق القانون نجد A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\ 4 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\ 1 & 1/2 & -1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

ثانياً: المقلوب بطريقة جوردان:

لنبحث عن A^{-1} بتحويل $[A\,|\,I]$ إلى $[I\,|\,A^{-1}]$ باستخدام عمليات التحويل البسيطة على الأسطر.

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

للوصول إلى النتيجة بأبسط وأسرع أسلوب يفضل التفكير بتحويل أعمدة A عموداً عمودا وعلى الترتيب بحيث تصبح بالشكل المطلوب أي شكل المصفوفة I . فنبدأ بالعمود الأول الذي يتطلب لوضعه بالشكل المطلوب تطبيق عمليتي التحويل $C_{21}(1)$ و $C_{31}(-1)$. ثم ننطلق لوضع العمود الثاني بشكله المطلوب وهكذا.

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[C_{31}(-1)]{C_{21}(1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&2&2&1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[C_{2}(0.5)]{C_{21}(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&-1&0\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[C_{23}(-0.5)\,,\,C_{3}(0.5)]{C_{13}(0.5)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]=\left[I\;|A^{-1}\right]$$

و منه:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

§-5 – المعادلات الخطية المتعددة المتغيرات:

1-5 الشكل المصفوفي لجملة n معادلة بـ n متغير

إن الشكل العام لجملة n معادلة خطية بـ n متغير هو:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+.........+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+.........+a_{2n}x_n=b_2\\...\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+.........+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(I)$$

حيث أن الأعداد a_{ij} تسمى بمعاملات الجملة و x_j هي متغيرات الجملة و b_i تمثل ثوابت الجملة وذلك من أجل $i=1,2,\ldots,n$ و $j=1,2,\ldots,n$.

تسمى المصفوفة A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بمصفوفة معاملات الجملة. وتسمى مصفوفة العمود X :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

بمصفوفة عمود المتغيرات. وتسمى مصفوفة العمودB:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$$

بمصفوفة عمود ثوابت الجملة. هذا ويمكن كتابة الجملة (I) بالشكل المصفوفي:

$$A \cdot X = B \qquad (II)$$

حيث يسمى هذا الشكل الأخير أيضاً بالمعادلة الشعاعية (المصفوفية).

2-5 حل جملة n معادلة خطية بـ n متغير.

إذا أعطيت جملة المعادلات (I) و كانت A مصفوفة المعاملات نظامية، أي $|A| \neq 0$ فيكون لجملة المعادلات المذكورة حل وحيد. يمكن الحصول على هذا الحل بطرق عديدة. نذكر منها هنا ثلاث فقط.

آ – طريقة الشكل المصفوفي لقاعدة كرامر

بالعودة للشكل المصفوفي لجملة المعادلات السابقة:

$$A \cdot X = B \qquad (II)$$

نجد أن حل الجملة يعني تحديد قيم المتغيرات x_i حيث $i = 1,2,...,n$ أي تحديد قيم عناصر المصفوفة X . لإيجاد قيم عناصر X يمكن ضرب طرفي العلاقة (II) ومن اليسار بـ A^{-1}، فيكون: