

تمهيد: علم المصفوفات هو علم قائم بذاته حيث تلعب المصفوفات دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وغير الخطية في فروع الرياضيات المختلفة . فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها تطبيقات في مجالات عديدة، في الاقتصاد، والإحصاء وبحوث العمليات والعمليات الإدارية وغيرها من المجالات. فمثلاً نجد أن المصفوفات هي الأساس في صياغة نماذج المنتج والمستخدم وكذلك صياغة متسلسلات ماركوف. ويعتبر الرياضي هاملتون والرياضي كاييلي أول من أدخل مفهوم المصفوفات.

1-2 تعريف المصفوفة من المرتبة $m \times n$: لنكن لدينا المجموعة X (مجموعة غير خالية) ولتكن المجموعتان : $F = \{1,2,3,\dots,n\}$ و $E = \{1,2,3,\dots,m\}$ حيث m, n أعداد طبيعية و $(m \geq 1, n \geq 1)$ فإن كل تطبيق من الشكل : $f: E \times F \rightarrow X$ يسمى $m \times n$ مصفوفة أو مصفوفة مرتبتها $m \times n$ أو مصفوفة من الشكل (m, n) وذلك من المجموعة X .

إذا رمزنا للصورة المباشرة للثنائية (i, j) وفق التطبيق f بالرمز a_{ij} ، وذلك من أجل أي عنصر (i, j) من الجداء $E \times F$ فإن العناصر التالية:

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$$

لنرتب العناصر $f(E \times F)$ في m من الصفوف و n من الأعمدة بحيث يقع العنصر a_{ij}

في الصف الذي رقمه (i) والعمود الذي رقمه (j) كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \quad (1-2)$$

أو اختصاراً :

$$A = [a_{ij}]_{(m,n)} \quad (2-2)$$

وتسمى بالمصفوفة $m \times n$ أو المصفوفة من المرتبة (m, n) ونرمز لها بأحرف كبيرة مثل $A, B, C, \dots$ وتسمى

المصفوفة المكونة من صف واحد و n عمود بالمصفوفة الصفية (أو مصفوفة الصف) وهي من المرتبة $(1, n)$

وتسمى المصفوفة المكونة من m صف وعمود واحد بمصفوفة العمود وهي من المرتبة $(m, 1)$

وفي حالة تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف ($m=n$) فإنها تسمى بالمصفوفة المربعة أو نقول من المرتبة n مثلاً

، كما تسمى العناصر a_{ii} ($i=1,2,\dots,n$) فيها بالقطر الرئيسي .

ملاحظة(1): في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون عناصر المصفوفة أعداداً فريماً تكون دوال أو كثيرات حدود

أو ... ، وسنهتم في دراستنا بالمصفوفات التي عناصرها أعداد، وبهذا نقول لدينا مصفوفة A معرفة على حقل الأعداد

الحقيقية أو العقدية.

ملاحظة(2): يمكن تعريف المصفوفة على أنها جدول مؤلف من مجموعة عناصر مرتبة بشكل صفوف عددها m وأعمدة

عددها n .

أمثلة:

-1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 4 \quad 0 \quad 1], \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مؤلفة من ثلاثة صفوف وعمودين فهي من الشكل (3,2)، والمصفوفة B مؤلفة من ثلاثة صفوف وثلاثة

أعمدة فهي من الشكل (3,3)، والمصفوفة C مؤلفة من صف واحد وأربعة أعمدة وتسمى بمصفوفة الصف فهي من

الشكل (1,4)، والمصفوفة D مؤلفة من عمود واحد وأربعة صفوف وتسمى بمصفوفة العمود فهي من الشكل (4,1) .

-2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A في هذا المثال فيها $(m=n)$ أي مربعة من المرتبة $(3,3)$ أو اختصاراً من المرتبة 3، كما نلاحظ أن هذه المصفوفة والمصفوفة B من المثال السابق لهما نفس المرتبة $(3,3)$ (كل منهما تحوي عدداً من الصفوف يساوي 3 وعدداً من الأعمدة يساوي 3).

-3

$$A = \begin{bmatrix} 1+i \\ 4i \\ -5+2i \\ 3i \end{bmatrix}$$

المصفوفة A من المرتبة $(4,1)$ وعلى حقل الأعداد العقدية C وهي مصفوفة عمود. **ملاحظة (3):** سنرمز لجملة المصفوفات من المرتبة (m,n) وعلى حقل الأعداد K بالرمز $M_{(m,n)}(K)$. من خلال الأمثلة السابقة في المثال (1): $A \in M_{(3,2)}(R)$ ، $B \in M_{(3,3)}(R)$ ، $C \in M_{(1,4)}(R)$ ، $D \in M_{(4,1)}(R)$. في المثال (3): $A \in M_{(4,1)}(C)$.

2-2 تساوي مصفوفتين: نقول عن مصفوفتين $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ ، $B = [b_{ij}]_{(p,q)}$ إنهما متساويتان ونكتب $A = B$ إذا تساوت كل العناصر المتقابلة في المصفوفتين، وبكلام آخر إذا كان:

1- من مرتبة واحدة أي $n = q$ ، $m = p$.

2- العناصر المتقابلة في المصفوفتين متساوية أي: $a_{ij} = b_{ij}$ ، $(1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m)$.

ونكتب اختصاراً: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j (1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m)$
أمثلة:

1- إذا كان:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن: $a_{11} = -7$ ، $a_{12} = 0$ ، $a_{21} = 3$ ، $a_{22} = 4$.

2- عين قيمة λ لتكون المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2 \\ \lambda & 3 \\ 5 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

على حقل الأعداد الحقيقية R متساويتين.



بما أن المصفوفتين من مرتبة واحدة (3,2) لذلك نكتفي بتحقيق شرط تساوي العناصر المتقابلة:

$$\lambda^2 - \lambda = 2 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

ومنه:

$$\lambda = 2, \lambda = -1, \text{ وبالتالي فإن } \lambda = -1.$$

3-2 منقول مصفوفة: إن منقول مصفوفة $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ هو مصفوفة جديدة ناتجة من جعل الصفوف أعمدة (أو الأعمدة صفوفاً) ونرمز لها بالرمز A^T ونعرفها بالشكل التالي:

$$A^T = [a_{ji}]_{(n,m)} \quad (3-2)$$

(أي إذا كانت المصفوفة A من المرتبة (m,n) فإن منقولها من المرتبة (n,m)).

ملاحظة(4): لا يؤثر منقول مصفوفة في قيمة المحدد بمعنى أن: $|A^T| = |A|$ وذلك للمصفوفات المربعة (كما سيمر لاحقاً).

مثال:

أوجد منقول المصفوفة A على حقل الأعداد العقدية:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -3i \\ 5-i & 5 \\ 6+i & i \\ 3i+1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 5-i & 6+i & 3i+1 \\ -3i & 5 & i & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة(5): من تعريف منقول مصفوفة نلاحظ أن:

$$(A^T)^T = A \quad (1)$$

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T; A, B \in M_{(m,n)}(K) \quad (2)$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T; \alpha \in K \quad (3)$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T; A \in M_{(m,n)}(K), B \in M_{(n,p)}(K) \quad (4)$$

مثال:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $(A+B)^T, A+B, B^T, A^T$

الحل:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}, (A+B)^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4-2 المصفوفات الخاصة:

1-4-2 تعريف الأعداد العقدية المترافقة وخواصها:

(١) إذا كان a و b عددين حقيقيين وكان $i = \sqrt{-1}$ فإن $z = a + bi$ يسمى عدداً عقدياً . ويسمى العددان العقديان $a + bi$ و $a - bi$ عددين مترافقين ، كل منهما مرافق للآخر .

(٢) إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = \overline{z_1} = a - bi$ فإنه يكون $\overline{\overline{z_2}} = \overline{a - bi} = a + bi = z_1$

(مرافق المرافق لعدد z هو العدد z نفسه) .

(٣) إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ فإنه يكون:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}, z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$

(المرافق لمجموع عددين عقديين هو مجموع مرافقي هذين العددين)

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \Rightarrow$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

(المرافق لحاصل جداء عددين مركبين هو حاصل ضرب مرافقيهما)

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & i & 1+i \\ 5 & -i & 1+6i \\ 0 & 1-i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} 2+i & -i & 1-i \\ 5 & i & 1-6i \\ 0 & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$



2-4-2 تعريف مرافق منقول مصفوفة: هو مصفوفة A^* المحققة $A^* = \overline{(A^T)}$.

2-4-3 مصفوفات الصف والعمود: إن المصفوفة المؤلفة من m صفاً وعموداً واحداً $(m,1)$

تسمى مصفوفة عمود كالمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

أما المصفوفة المؤلفة من n عموداً و صفاً واحداً $(1, n)$ تسمى بمصفوفة الصف كالمصفوفة:

$$B = [b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad \dots \quad b_{1n}] \quad (5-2)$$

ملاحظة(6): تسمى هذه المصفوفات بمتجهات العمود أو الصف.

2-4-4 المصفوفة الصفرية: تكون جميع عناصرها أصفاراً (صفر الحقل K) ونرمز لها بالرمز:

$$O_{m,n} \text{ أو } a_{ij} = 0; (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \quad (6-2)$$

ومن أهم خصائصها:

$$A_{m,n} + O_{m,n} = A_{m,n} \Leftrightarrow A - A = 0, O_{m,n} \times A_{n,1} = O_{m,1}, A_{m,1} \times O_{1,n} = O_{m,n}$$

مثال:

$$O_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2-4-5 المصفوفة المربعة: إذا كان $(m = n)$ في المصفوفة $A = [a_{ij}]$ فتسمى المصفوفة بالمربعة ونقول إنها من

المرتبة n بدلاً من (n, n) وتسمى $A = [a_{ij}]$ بالمصفوفة المستطيلة إذا كان $(m \neq n)$.

2-4-6 المصفوفة القطرية: تكون المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ قطرية إذا كان:

$$(a_{ij} = 0; i \neq j) \text{ أي أن جميع عناصر المصفوفة أصفاراً ماعدا عناصر قطرها الرئيسي وهي: } a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

أي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}]$$

7-4-2 المصفوفة السلمية: هي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي متساوية وتساوي $\lambda \in K$ وبقيّة العناصر معدومة ونكتبها على النحو التالي:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A = [a_{ij}]; a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ \lambda & ; i = j \end{cases} \quad (9-2)$$

8-4-2 المصفوفة المتناظرة: تكون المصفوفة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ متناظرة إذا كان:

$$a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j \quad \text{وذلك من أجل جميع قيم } (i, j = 1, 2, \dots, n) \text{ أي إذا كان } A = A^T.$$

إن المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة مربعة لأنها تحقق: $(a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j = 1, 2, \dots, n)$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1+i & 4i & 2-i \\ 4i & -3 & -6i \\ 2-i & -6i & 1+2i \end{bmatrix}$$

كل من A و B متناظرة.

9-4-2 المصفوفة المتخالفة (ذات التناظر العكسي): تكون المصفوفة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ متخالفة

إذا كان: $(a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, j = 1, 2, \dots, n)$ ، (أي إذا كان: $A = -A^T$).

عندما يكون $i = j$ فإن $(a_{ii} = 0; \forall i)$ وذلك لأن:

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0; \forall i$$

أي أن عناصر القطر الرئيسي فيها يجب أن تكون أصفاراً.



مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4i & 2-i \\ -4i & 0 & -6i \\ -2+i & 6i & 0 \end{bmatrix}$$

كل من A و B متخالفة.

2-4-10 المصفوفة المثلثية العليا (السفلى): إذا كانت جميع العناصر $(a_{ij} = 0; i > j)$ ، أي إذا كانت جميع العناصر

الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة (إذا كانت جميع العناصر $(a_{ij} = 0; i < j)$ أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة).

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

 A عليا و B سفلى.

ملاحظة (7): لمعرفة المصفوفة شاذة أو غير شاذة يجب أن يكون قيمة محدها غير معدوم (سوف نعرف محدد المصفوفة لاحقاً).

مثال:

بفرض لدينا المصفوفة المثلثية:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة مثلثية فإن محدها عبارة عن جداء عناصر قطرها الرئيسي:

$$|A| = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \neq 0$$

وبالتالي المصفوفة A ليست شاذة لأن محدها مخالفاً للصفر أي $|A| \neq 0$.

2-4-11 المصفوفة الواحنية: هي مصفوفة سلمية عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد والعناصر غير القطرية تكون

أصفاراً ونرمز لها بالرمز I_n .

واختصاراً نكتب:

$$A = [a_{ij}]; a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases} \quad (10-2)$$

مثال:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_1 = [1] = 1$$

الخاصة الهامة للمصفوفة الواحدية هي: $I_{n,n} \times A_{n,m} = A_{n,m} \times I_{m,m} = A_{n,m}$

12-4-2 المصفوفة المرافقة لمصفوفة: هي مصفوفة عناصرها هي العناصر المرافقة لعناصر

المصفوفة العكسية A ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$.

13-4-2 المصفوفة الهرميتية: تكون المصفوفة العكسية هرميتية إذا كان:

$$A = A^* = \overline{(A^T)} \quad (11-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij} = \overline{a_{ji}}; i, j = 1, 2, \dots, n)$.ملاحظة (8): بما أن $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ عندما $i = j$ فإنه يجب أن تكون $a_{ii} \in \mathbb{R} \forall i$ (أي عناصر

القطر الرئيسي في المصفوفة الهرميتية يجب أن تكون أعداداً حقيقية دوماً).

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = A^* = \overline{(A^T)}$$

14-4-2 المصفوفة الهرميتية المتخالفة: تكون المصفوفة العكسية هرميتية متخالفة إذا كان :

$$A = -A^* = -\overline{(A^T)} \quad (12-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية المتخالفة هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij} = -\overline{a_{ji}}; i, j = 1, 2, \dots, n)$.

ملاحظة(9): بما أن $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ عندما $i \neq j$ فإنه يجب أن تكون عناصر القطر الرئيسي

في المصفوفة الهرميتية المتخالفة أعداداً تخيلية بحتة أو أصفاراً.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}i & \frac{3}{2}+2i & 2-\frac{5}{2}i \\ -\frac{3}{2}+2i & -2i & \frac{5}{2}+3i \\ -2-\frac{5}{2}i & -\frac{5}{2}+3i & 0 \end{bmatrix}$$

كل من A و B هرميتية متخالفة: $A = -A^* = -(\overline{A^T})$, $B = -B^* = -(\overline{B^T})$.

ملاحظة(10): المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

ملاحظة(11): المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

ملاحظة(12): كل عدد حقيقي أو عقدي يمكن النظر إليه كمصفوفة من الشكل (1,1) ونكتب $A = [a_{11}]$ نسميها المصفوفة وحيدة العنصر.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 0 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مربعة ومثلثية سفلى - المصفوفة B مثلثية عليا - المصفوفة C سلمية - المصفوفة D متناظرة.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -8 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & -5 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة E متناظرة متخالفة - المصفوفة F هرميتية - المصفوفة G هرميتية متخالفة - المصفوفة I أو (I_3) واحدة.

2-4-15 المصفوفة شبه القطرية: نسمي المصفوفة المربعة المجزأة A والتي ينطبق قطرها الرئيسي على الأقطار

الرئيسية لعدد من المصفوفات المربعة الجزئية $A_1, A_2, \dots, A_k$ المصفوفة شبه القطرية حيث $A_1, A_2, \dots, A_k$ مصفوفات جزئية مربعة متساوية الدرجة وباقي عناصر المصفوفة A عبارة عن أصفار.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة A شبه قطرية حيث عناصر قطرها الرئيسي ينطبق على الأقطار الرئيسية للمصفوفات المربعة الجزئية :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2-5 مقلوب مصفوفة: وهي مصفوفة تنتج من المصفوفة A ونرمز لها بالرمز A^{-1} ، والمصفوفة المستطيلة يكون لها مقلوبان من اليمين وتحقق العلاقة:

$$A_{m,n} \times A_{n,m}^{-1} = I_{m,m} \quad (13-2)$$

ومن اليسار وتحقق العلاقة:

$$A_{n,m}^{-1} \times A_{m,n} = I_{n,n} \quad (14-2)$$

وبالتالي إذا كانت المصفوفة مربعة ($m = n$) فإن للمصفوفة مقلوباً واحداً هو: $A_{n,n}^{-1}$ يحقق العلاقة:

$$A_{n,n} \times A_{n,n}^{-1} = A_{n,n}^{-1} \times A_{n,n} = I_{n,n} \quad (15-2)$$

الذي يجب ذكره هو أن وجود المقلوب يرتبط بشروط سنذكرها لاحقاً ، أما بالنسبة للمصفوفة المربعة فإن الشرط هو $|A| \neq 0$ (محدد A لا يساوي الصفر) أي إن المصفوفة A نظامية (غير شاذة). وإذا كان $|A| = 0$ فإن A ليس لها مقلوب وتكون A مصفوفة شاذة (أو فريدة).

2-5-1 مبرهنة: إذا كان للمصفوفة المربعة A مقلوب فهذا المقلوب وحيد ويرمز له بالرمز A^{-1} بحيث يكون:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad (16-2)$$

الإثبات:

نفرض أن B و C مقلوبا المصفوفة المربعة A هذا يعني :

$$AB = B.A = I$$

$$AC = C.A = I$$

لكن:

$$C.AB = C.(AB) = C.I = C$$

$$C.AB = (C.A).B = I.B = B$$

بالمقارنة نجد: $B = C$ ، مما يعني أن للمصفوفة المربعة مقلوب وحيد إن وجد (في حال كان $|A| \neq 0$).

2-6 خصائص المصفوفات القطرية والمثلثية:

1- إذا كانت A و B مصفوفتين قطريتين لهما نفس المرتبة فإن:

$AB, BA, A+B, A-B$ هي مصفوفات قطرية ، كذلك فإن A^{-1} تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية

من الأصفار تماماً ، وتكون A^{-1} قطرية وعناصر قطرها مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة A .

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

2- إذا كانت A و B مصفوفتين مثلثيتين عليا (سفلى) لهما نفس المرتبة عندئذ تكون المصفوفات:

$AB, BA, A-B, A+B$ مصفوفات مثلثية ، كذلك فإن A^{-1} تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية من الأصفار تماماً وتكون A^{-1} قطرية وعناصر قطرها هي مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة A .

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 4 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

3- إذا كانت A مصفوفة قطرية أو مثلثية (علياً أو سفلى) فإن محدد المصفوفة A هو حاصل ضرب عناصر القطر

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad \text{الرئيسي أي أن :}$$

7-2 المجموع المباشر:

إذا كان $A_1, A_2, \dots, A_s$ مصفوفات مربعة مرتبة كل منها على الترتيب $m_1, m_2, \dots, m_s$ فإن المصفوفة القطرية:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s) \quad (17-2)$$

تسمى المجموع المباشر للمصفوفة A_i



إذا كانت:

$$A_1 = [2] , A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} , A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

مصفوفات ، فأوجد المجموع المباشر للمصفوفات A_1, A_2, A_3

الحل:

$$\text{diag}(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة (١٣): إذا كانت $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n), B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$ حيث A_i و B_i من مرتبة واحدة لقيم $(i = 1, 2, \dots, s)$ فإن:

$$AB = \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_s B_s) \quad (18-2)$$

8-2 العمليات على المصفوفات:

1- جمع وطرح المصفوفات:

إذا كانت المصفوفتان: $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ على حقل واحد K ومن مرتبة واحدة (m, n) فإن:

$$\left. \begin{aligned} C = [c_{ij}] &= A_{m,n} + B_{m,n}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \forall i, j \\ D = [d_{ij}] &= A_{m,n} - B_{m,n}; d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}; \forall i, j \end{aligned} \right\} \quad (19-2)$$

مثال:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A + B$ ، $A - B$

الحل:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 7 \\ 10 & 1 & 8 \end{bmatrix} , D = A - B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

ملاحظة (14): إن عملية جمع المصفوفات على الجملة $M_{(m,n)}(K)$ هي عملية داخلية تتصف بما يلي:

(1) المصفوفة الصفريّة $0_{m,n}$ عنصر حيادي بالنسبة للجمع: $0 + A = A + 0 = A$.

(2) عملية الجمع تجميعية: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(3) لكل مصفوفة نظير بالنسبة للجمع هو $(-A)$ حيث: $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

(4) عملية الجمع تبديلية: $A + B = B + A$.

ومنه فإن الجملة $M_{(m,n)}(K)$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

كذلك إذا كانت $\forall \lambda, \mu \in K \text{ \& } A, B \in M_{(m,n)}(K)$ فإن:

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A \quad (5)$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad (6)$$

لنثبت صحة (6) :

$$\lambda(A + B) = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] = \lambda A + \lambda B$$

2- ضرب المصفوفات:

لتكن $A = [a_{ij}] \in M_{n,m}(K)$ ، $B = [b_{ij}] \in M_{m,l}(K)$ مصفوفتين ، نعرف جداء المصفوفتين A, B بأنه مصفوفة

جديدة C معرفة بالشكل التالي:

$$C = A \cdot B = [c_{ij}] \in M_{n,l}(K) \quad (20-2)$$

وعناصر المصفوفة C معرفة كما يلي:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}, \forall i, j \quad (21-2)$$

أي أن كل عنصر c_{ij} من عناصر مصفوفة الجداء يساوي مجموع جداءات العناصر الواقعة في الصف i من

المصفوفة A بعناصر العمود j من المصفوفة B .

أي أنه لإجراء عملية الضرب ، يجب أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ونقول إن B قابلة

للضرب في A من اليسار (أي لحاصل ضرب مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان متوافقتين بالنسبة لعملية الضرب).

مثال:

لتكن لدينا:



$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $C = A \cdot B$

الحل:

$$C = C_{31} = A_{33} \cdot B_{31} = \begin{bmatrix} (-2)(1) + 1(-1) + 4(-2) \\ 1(1) + 2(-1) + 3(-2) \\ 0(1) + 1(-1) + (-1)(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (-2)(1) + 1(-1) + 4(-2) = -11$$

وبشكل مشابه بالنسبة لـ c_{21} ، c_{31} .

ملاحظة(15): عملية الضرب في المصفوفات غير تبديلية.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A \cdot B = 2(1) + 1(4) + 3(3) = 15$$

لكن:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 12 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن: $A \cdot B \neq B \cdot A$

9-2 قوانين هامة:

$$(A + B)C = AC + BC \quad (2)$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad (1)$$

$$AB \neq BA \quad (4) \quad (\text{بشكل عام})$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC \quad (3)$$

$$k(A \pm B) = kA \pm kB \quad (6)$$

$$kA = [ka_{ij}] \quad (5) \quad (k \text{ ثابت})$$

$$(k_1 k_2)A = k_1(k_2 A) \quad (8)$$

$$(k_1 \pm k_2)A = k_1 A \pm k_2 A \quad (7)$$

$$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0 \quad (10)$$

$$I \cdot A = A \cdot I = A \quad (9)$$

لنثبت صحة (1):

بفرض: $A = [a_{ij}]_{n,m}$, $B = [b_{ij}]_{m,l}$, $C = [c_{ij}]_{m,l}$ فإن: $(B + C)_{m,l} = [b_{ij} + c_{ij}]_{m,l}$

$$A(B + C) = \left[\sum_{k=1}^m a_{ik}(b_{kl} + c_{kl}) \right] = \left[\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kl} + \sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kl} \right] =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kl} \right] + \left[\sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kl} \right] = AB + AC$$

وبشكل مشابه يمكن إثبات بقية القوانين.

ملاحظة(16): إذا كان $AB = 0$ فهذا لا يعني أن أي من المصفوفتين A أو B يجب أن تكون مصفوفة صفرية (جاء

مصفوفتين يمكن أن يساوي المصفوفة الصفرية دون أن يكون أي منهما مصفوفة صفرية).

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+6-8 & 4-2-2 & -2+8-6 \\ 1+3-4 & 2-1-1 & -1+4-3 \\ 3+9-12 & 6-3-3 & -3+12-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

ملاحظة(17): يمكن التحقق من صحة عملية الضرب إذا أخذنا الترتيب التالي لمجموع الصفوف ومجموع الأعمدة.

مثال:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{(2,3)} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 25 & 23 \end{bmatrix}_{(2,2)}$$

				B		+
				2	1	3
				1	2	3
				3	3	6
A	2	3	2	13	14	27
	4	2	5	25	23	48



$$3(2) + 3(3) + 6(2) = 27$$

$$3(4) + 3(2) + 6(5) = 48$$

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الصفوف:

			B	
			2	1
			1	2
			3	3
A	2	3	2	13
	4	2	5	25
	6	5	7	38
				37

$$6(2) + 5(1) + 7(3) = 38$$

$$6(1) + 5(2) + 7(3) = 37$$

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الأعمدة:

3- قسمة المصفوفات: إن العملية $\frac{A}{B}$ غير موجودة ولكن إذا كانت B^{-1} موجودة فإن العملية AB^{-1} أو $B^{-1}A$ هي

المعرفة في المصفوفات وعليه فإن كان المطلوب حل المعادلة $AX = B$ في المتغير x فإنه إذا كانت A^{-1} موجودة فإن

$$X = A^{-1} \cdot B$$

4- تجزئة المصفوفات للعمليات المختلفة: يمكن تقسيم أو تجزئة المصفوفة إذا كانت مرتبتها كبيرة وذلك إلى مصفوفات

جزئية ، ويمكن استخدام هذه التجزئة في العمليات المختلفة على المصفوفات.

أمثلة:

-1

$$A = [a_{ij}] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

وأيضاً:

$$B = [b_{ij}] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right]$$

مثلاً عملية الجمع تتم بالشكل:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{array} \right]$$

وعملية الضرب كالتالي:

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array} \right]$$

2- لنأخذ المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{bmatrix}$$

من خلال التقسيم حصلنا على المصفوفات الجزئية التالية:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} a_{36} \\ a_{46} \end{bmatrix}$$

3- احسب الجداء $A \cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 35 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 35 \\ 1 & 19 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

4- احسب الجداء $A \cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

10-2 تعريف المحدد من المرتبة الثانية:

بفرض لدينا المصفوفة من المرتبة الثانية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (22-2)$$

يعرف محدّد هذه المصفوفة من المرتبة 2×2 على أنه القيمة العددية التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (23-2)$$

أي أن محدد مصفوفة من المرتبة الثانية يساوي حاصل جداء عناصر قطرها الرئيسي مطروحاً منه حاصل جداء عنصري قطرها الثانوي.

2-11 فك المحدد عن طريق العوامل:

2-11-1 المتمم الجبري (عامل عنصر): بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، نسمي صغير العنصر a_{ij}

مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ بالمتمم الجبري للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز A_{ij} ويكون :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad (24-2)$$

مثال:

بفرض لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

إن صغير العنصر 4 هو $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ وعدد هذه الصغائر تسعة ذات المرتبة 2×2

والمتمم الجبري (عامل العنصر) هو $A_{12} = (-1)^{1+2} \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

ملاحظة (18): بفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من المرتبة n وأن هاتين المصفوفتين تختلفان فقط في عناصر الصف الذي رقمه i وفيما عدا ذلك فهما متماثلتان عندئذٍ تكون المتممات الجبرية لعناصر هذا الصف واحدة في هاتين المصفوفتين.

2-12 المحدد من المرتبة الثالثة:

بفرض لدينا المصفوفة المربعة من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

إن محدد المصفوفة يكتب بالشكل التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (26-2)$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$



وتسمى طريقة لابلاس أي نشر المحدد من المرتبة الثالثة بدلالة ثلاثة محدثات من المرتبة الثانية.

أو حسب طريقة ساروس لحساب قيمة محدد من المرتبة الثالثة بالشكل التالي:

نضيف العمودين الأول والثاني من المصفوفة إلى يمين المحدد ثم نقوم بجمع جداءات عناصر أقطارها الرئيسية مطروحاً منه مجموع جداءات عناصر أقطارها الثانوية.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (27-2)$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

كما نلاحظ فإن هذه الطريقة تطبق على المحدثات من المرتبة 3 .

2-13 تعريف محدد أي مصفوفة من أي مرتبة n .

محدد المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ من المرتبة $n \times n$ يتم حسابه وفق أي صف أو أي عمود نختاره وذلك بضرب

كل عنصر من عناصر هذا الصف (أو العمود) في متممه الجبري (عامله) ثم جمع حواصل الضرب.

$$1- \text{ من الصف } i \quad |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

$$2- \text{ من العمود } j \quad |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لنحسب قيمة محدد هذه المصفوفة وذلك بحسب عناصر الصف الأول:

$$|A| = (1)A_1 + 3A_2 + (-1)A_3 = 1(-4) + 3(8) + (-1)(2) = 18$$

ملاحظة(19): عند فك المحدد تؤخذ قاعدة الإشارات في الاعتبار عند أخذ قيمة العنصر وهي

القاعدة التي تحل محل $(-1)^{i+j}$ الموجودة في تعريف المتمم الجبري (العامل).

مثال:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 + 6 + 4 = 16$$

يمكن اختيار الصف (أو العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار وذلك لسهولة الحساب

14-2 خواص المحددات:

1- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكان عناصر أحد صفوف (أو أعمدة) المصفوفة أصفاراً ، فإن قيمة محددها تكون صفراً .

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

2- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n و B مصفوفة مربعة ناتجة عن المصفوفة A بتبديل وضعي صفين

(أو عمودين) مع المحافظة على باقي الصفوف (الأعمدة) فإن:

$$\det A = -\det B \quad \text{أو} \quad |A| = -|B| \quad (28-2)$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 17, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -17$$

3- إذا حوت المصفوفة المربعة A من المرتبة n صفين (عمودين) متساويين أو متناسبين فإن محددها هذه المصفوفة

يساوي الصفر .

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

4- إذا ضربنا جميع عناصر أحد الصفوف (أحد الأعمدة) في مصفوفة مربعة من المرتبة n بعدد ثابت λ فإن محددها

المصفوفة الناتجة يساوي إلى محددها الأصلية A مضروباً بالعدد الثابت λ .



الإثبات:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda a_{11})(a_{22}) - (\lambda a_{12})(a_{21}) = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda|A| \quad (29-2)$$

حيث: $A = [a_{ij}]_{(2,2)}$. ويمكن البرهان على ذلك من أجل أي مرتبة n .

مثال:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

5- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن مجموع جداءات عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) بالمتتمات الجبرية لعناصر صف آخر (عمود آخر) يساوي الصفر.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -5$$

إذا أخذنا جداءات عناصر الصف الأول بالمتتمات الجبرية لعناصر الصف الثاني نجد:

$$2(-1)(3) + 1(7) + 1(-1) = 0$$

-6 إن :

$$|\lambda A| = \lambda^n |A| \quad (30-2)$$

حيث n مرتبة المصفوفة A .

مثال:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (2)^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 280$$

7- لا تتغير قيمة محدد مصفوفة مربعة A من المرتبة n إذا أضفنا إلى عناصر أحد صفوفها العناصر المقابلة لها من

صف آخر بعد ضربه بعدد ثابت.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ (2)(1)+2 & (2)(0)+3 & (2)(1)+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ملاحظة (20): يمكن حساب محدد من خلال طريقة تحويل جميع عناصر أحد الصفوف (أو الأعمدة) إلى أصفار ما عدا عنصراً واحداً منها (ونذلك باستخدام الخاصية 7).

8- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن محدد منقول مصفوفة يساوي محدد هذه المصفوفة.

$$\det A^T = \det A \text{ أو } |A^T| = |A| \quad (31-2)$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

إن:

$$|A| = 76, \quad |A^T| = 76 = |A|$$

9- محدد جداءات المصفوفات: لتكن A, B مصفوفتين مربعيتين من المرتبة n فإن:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \quad (32-2)$$

وتعمم هذه الخاصية على عدد منته من المصفوفات:

$$|A_1 \cdot A_2 \cdots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k| \quad (33-2)$$

10- إذا كانت جميع عناصر الصف الذي رقمه k في مصفوفة A مربعة من المرتبة n عبارة عن مجموع حدين أي:

$$a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

A_2 حيث عناصر الصف الذي رقمه k في A هي الحدود a'_{kj} من العلاقة السابقة و عناصر الصف الذي رقمه k

في A_2 هي الحدود الثانية من العلاقة السابقة a''_{kj} والصفوف الأخرى هي نفسها في المصفوفة A أي:

$$|A| = |A_1| + |A_2| \text{ أو } \det A = \det A_1 + \det A_2 \quad (34-2)$$

مثال:



$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0+6 & 1+3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=|A|} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}_{=|A|} = -8$$

11- إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة فإن $\frac{d}{dt}|A|$ هو عبارة عن المجموع لـ n من المحددات التي يستبدل فيها كل صف

على التوالي بتفاضل هذا الصف.

مثال:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} x & 2x \\ e^x & \ln x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ e^x & \ln x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2x \\ e^x & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \ln x - 2e^x + x \frac{1}{x} - 2xe^x$$

ملاحظة(21): إذا كانت كل عناصر المحدد الواقعة على أحد جانبي قطره الرئيسي تساوي الصفر، فإن هذا المحدد

يساوي حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.

أو يمكن القول بأن محدد مصفوفة قطرية من المرتبة n يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي (وهي حالة خاصة من المصفوفة المثلثية).

الإثبات: لتكن A مصفوفة مثلثية على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

وذلك بالفك من الصف الأخير.

أيضاً بالفك من الصف الأخير نجد:

$$|A| = a_{nn} a_{(n-1)(n-1)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-2)(n-2)} \end{vmatrix}$$

ويتوالى الفك من الصف الأخير نحصل على:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad (35-2)$$

ملاحظة (22): بنفس الطريقة بالنسبة للمصفوفة المثلثية السفلى فإن العملية تتم مع توالي الفك من الصف الأول دائماً.

15-2 محدد فاندروند:

هو محدد من الشكل:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (36-2)$$

يمكن إثبات أنه $\forall n$ فإن :

$$d_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \quad (37-2)$$

الإثبات: يمكن البرهان بطريقة الاستنتاج الرياضي ، عندما $n=2$ فإن:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \quad (38-2)$$

وهو محقق. لنفرض أن محدد فاندروند محقق من أجل $(n-1)$ ولنبرهن من أجل n . من أجل ذلك نقوم بإجراء

تحويلات على محدد فاندروند:

نطرح الصف رقم $(n-1)$ بعد ضربه بـ a_1 من الصف الأخير رقم n ، ثم نطرح من الصف رقم $(n-1)$ الصف رقم

$(n-2)$ مضروباً بـ a_1 ، وهكذا وبشكل مشابه ، وأخيراً طرح الصف الأول من الصف الثاني مضروباً بـ a_1 وبالتالي

نحصل على المحدد:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad (39-2)$$

وبفك المحدد الأخير بواسطة العمود الأول نحصل على محدد من المرتبة $(n-1)$ مع إخراج العوامل المشتركة من جميع

الأعمدة:



$$d_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad (40-2)$$

إن المحدد الأخير من المرتبة $(n-1)$ وبالتالي من الفرض فإن هذا المحدد يساوي:

$$\prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \quad (41-2)$$

ومنه :

$$d_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \quad (42-2)$$

ملاحظة(23): بشكل مشابه فإن المحدد :

$$d' = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (43-2)$$

يساوي إلى:

$$d' = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) \quad (44-2)$$

16-2 مشتق محدد: بفرض أن عناصر المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ دوال في المتغير x قابلة للاشتقاق أو التفاضل

فيكون المشتق $\frac{d}{dx}|A|$ للمحدد $|A|$ بالنسبة للمتغير x يساوي مجموع n محدد تنتج من المحدد $|A|$ بأن نستعيض على

التوالي عن عناصر صف (عمود) منه بمشتقات هذه العناصر بالنسبة للمتغير x .

مثال:

أوجد مشتق المحدد:

$$A = \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

17-2 طرق إيجاد مقلوب مصفوفة مربعة:

17-2-1 تعريف المصفوفة القابلة للقلب: نقول عن المصفوفة المربعة A من المرتبة n أنها قابلة للقلب (أي لها

مقلوب) إذا وجدت مصفوفة مثل B تحقق الخاصة:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \quad (45-2)$$

نسمي المصفوفة B مقلوب المصفوفة A ونرمز لهل بالرمز A^{-1} .

17-2-2 المقلوب عن طريق المصفوفة الملحقة (المرافقة): نوجد المصفوفة الملحقة "المرافقة" للمصفوفة A ونرمز لها

بالرمز $adjA$ وهي عبارة عن منقول المصفوفة التي عناصرها العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A وهي عبارة عن:

$$adjA = [D_{ij}]^T = [D_{ji}] \quad (46-2)$$

حيث D_{ij} العامل المرافق للعنصر a_{ij} ، ثم نحسب $\det A$ والذي هو $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} D_{ij}$

بشرط A مصفوفة نظامية (غير شاذة) أي $|A| \neq 0$.

وأخيراً يكون:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA \quad (47-2)$$

مثال:

احسب $adjA$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

نحسب أولاً العوامل المرافقة $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ ثم $[D_{ij}]^T$

$$adjA = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}$$

3-17-2 مبرهنة: إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة فإن:

$$A \cdot \text{adj}A = \text{adj}A \cdot A = \det A \cdot I_n \quad (48-2)$$

ملاحظة (24): من المبرهنة السابقة نضرب طرفي العلاقة بـ $(\det A)^{-1}$ فنجد:

$$A \cdot [(\det A)^{-1} \text{adj}A] = [(\det A)^{-1} \text{adj}A] \cdot A = I_n \quad (49-2)$$

ومنه نستنتج أن $(\det A)^{-1} \text{adj}A$ هو نظير المصفوفة A بالنسبة للضرب .
إذن:

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{adj}A \quad (50-2)$$

مثال:

أوجد A^{-1} للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

المصفوفة A نظامية (غير شاذة) لأن:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} = -38 \neq 0$$

والمصفوفة مقلوب ويساوي $\frac{\text{adj}A}{|A|}$ (في المثال السابق أوجدنا $\text{adj}A$) وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = -\frac{1}{38} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة (25): إذا كان $\det A = 0$ فالمصفوفة تسمى شاذة (فريدة) وليس لها مقلوب.

4-17-2 المقلوب بطريقة الارتكاز: في هذه الطريقة تمد المصفوفة $A = [a_{ij}]$ بالمصفوفة الواحدية I على الشكل

$[A:I]$ ثم يتم الحصول على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $[A:I]$ على الشكل $[I:B]$ فتكون المصفوفة B هي

مقلوب المصفوفة A .

مثال:

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1- نأخذ الصف الأول من المصفوفة $[A|I]$ كصف ارتكاز والعنصر الأول من هذا الصف كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- نأخذ الصف الثاني من المصفوفة الناتجة كصف ارتكاز والعنصر الثاني منه كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A|I] \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3- نضرب صف الارتكاز الثاني بـ (-1) ونضيفه إلى الصف الثالث، كذلك نضرب صف الارتكاز الثاني بـ $(-\frac{4}{5})$ ونضيفه للصف الأول فنجد:

$$[A|I] \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & | & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} & | & 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

4- بأخذ الصف الثالث كصف ارتكاز والعنصر الثالث منه كعنصر ارتكاز وقسمة الصف على عنصر الارتكاز نجد:

$$[AAI] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array} \right]$$

5- نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(\frac{8}{15})$ ونضيفه إلى الصف الأول وأيضاً نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(-\frac{2}{3})$

ونضيفه للصف الثاني نجد:

$$[AAI] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array} \right] = [IA^{-1}]$$

ومنه يكون:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

5-17-2 مبرهنة "كيلي-هاملتون":

كل مصفوفة مربعة نظامية مثل $A = [a_{ij}]_n$ تحقق معادلتها المميزة: $|A - \lambda I| = 0$.

حيث إن المعادلة المميزة ممثلة بكثيرة حدود بالنسبة لـ λ بالشكل التالي:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (51-2)$$

تحقق معادلتها المميزة الممثلة بكثير حدود مصفوفة:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I \quad (52-2)$$

6-17-2 إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام مبرهنة "كيلي هاملتون":

بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n والتي معادلتها المميزة:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \quad (53-2)$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون فإن المصفوفة A تحقق معادلتها المميزة:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0 \quad (54-2)$$

نضرب طرفي المعادلة (31) بـ A^{-1} نجد:

$$a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0 \quad (55-2)$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I) \quad (56-2)$$

من خلال هذه العلاقة يمكن إيجاد المقلوب A^{-1} بدلالة قوى المصفوفة A علماً أن أكبر قوة لـ

A هي $(n-1)$ ويتم حساب الأمثال $a_0, a_1, \dots, a_n$ من المعادلة المميزة.

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أثبت أن A تحقق المعادلة: $A^3 - 8A^2 + 13A - 6I = 0$.

2- أوجد A^{-1}

الحل:

1- نوجد المعادلة المميزة:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 & 5 \\ -5 & 6-\lambda & 5 \\ -5 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون يكون لدينا:

$$-A^3 + 8A^2 - 13A + 6.I = 0$$

2- لإيجاد A^{-1} نضرب طرفي المعادلة $-A^3 + 8A^2 - 13A + 6.I = 0$ بـ (A^{-1}) نجد:

$$A^2 - 8A + 13.I - 6.A^{-1} = 0$$

ومنه:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} (A^2 - 8A + 13I)$$



$$A^{-1} = \frac{1}{6} \left\{ \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 13 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 & 35 & 35 \\ -35 & 36 & 35 \\ -35 & 35 & 36 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 & -5 & -5 \\ 5 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

7-17-2 تعريف المصفوفة العمودية (المتعامدة): إذا كان $A^T = A^{-1}$ أي منقولها يساوي مقلوبها

وبالتالي:

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n \quad (57-2)$$

ملاحظة(26): منقول مصفوفة عمودية هو أيضاً مصفوفة عمودية.

مثال: المصفوفة المعرفة بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة عمودية (متعامدة).

ملاحظة(27):

$$(1) \text{ إذا كانت } A = [a_{ij}] \text{ مصفوفة قطرية فإن: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{ii} \end{bmatrix} \text{ قطرية أيضاً بشرط } a_{ii} \neq 0; \forall i$$

$$(2) \text{ إذا كانت } A = [a_{ij}] \text{ مصفوفة مثلثية عليا (سفلى) فإن: } A^{-1} \text{ أيضاً تكون أيضاً مثلثية عليا (سفلى).}$$

$$(3) \text{ إذا كانت } A = [a_{ij}] \text{ مصفوفة متناظرة فإن } A^{-1} \text{ تكون أيضاً متناظرة.}$$

لنثبت صحة (3):

$$\text{إذا كانت } A = [a_{ij}] \text{ مصفوفة متناظرة فإنها تحقق } A = A^T \text{ وبأخذ مقلوب الطرفين نجد:}$$

$$A^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \text{ وهذا يعني أن } A^{-1} \text{ مصفوفة متناظرة.}$$

18-2 خواص المقلوب:

(1) المقلوب إن وجد فهو وحيد ويحقق العلاقة: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ (تم إثبات ذلك)

(2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (مقلوب جداء مصفوفتين مربعتين نظاميتين يساوي جداء مقلوبي هاتين المصفوفتين بترتيب

معاكس). ويمكن تعميم هذه الخاصة على مقلوب جداء عدة مصفوفات مربعة نظامية من المرتبة نفسها يساوي جداء

مقلوباتها بترتيب معاكس.

(3) إذا أخذنا منقول الطرفين في الخاصة (1) مع الاستفادة من الخاصة (2) نجد:

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = I_n \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (58-2)$$

أي إن مقلوب منقول المصفوفة المربعة النظامية A يساوي منقول مقلوبها.

(4) من الخاصة (1) نجد أن:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = [\det A]^{-1} \quad (59-2)$$

محدد مقلوب المصفوفة يساوي مقلوب محدد المصفوفة الأصلية.

(5) من الخاصة (1) نجد:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (60-2)$$

ملاحظة (28): لإيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية أي من الشكل (2×2) ونظامية (أي محددها لا يساوي الصفر)

، فإننا نبذل العنصرين الموجودين على القطر الرئيسي فيما بينهما ، ونبدل إشارة العنصرين الموجودين على القطر الثانوي

ونضرب المصفوفة الناتجة بمقلوب محدد المصفوفة $A = [a_{ij}]$ بحيث $|A| \neq 0$.

19-2 حل جملة معادلات خطية فيها $(m = n)$ باستخدام مقلوب مصفوفة:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (61-2)$$

تكتب هذه الجملة بالشكل التالي :

$$A \cdot X = B \quad (62-2)$$



أو:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (63-2)$$

فإذا كانت المصفوفة A نظامية (أي لها مقلوب) نجد:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (64-2)$$

مثال:

حل جملة المعادلات الآتية:

$$x_1 - x_2 + x_3 = -1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

الحل:

لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة المعاملات:}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة المتحولات:}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة الثوابت:}$$

إن محدد المصفوفة A هو $|A| = -3$

ويكون لدينا :

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -5$$

هو حل للجملة المعطاة.

ملاحظة (29): لإيجاد حل الجملة (2-63) يجب حساب A^{-1} ومن ثم إجراء الجداء $A^{-1} \cdot B$.

20-2 حل جملة معادلات خطية فيها ($m = n$) باستخدام قاعدة كرامر:

لنكن لدينا جملة المعادلات الخطية (2-63) والتي حلها كما رأينا سابقاً هو: $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = (\det A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

بإجراء الضرب نجد:

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot [b_1 D_{1i} + b_2 D_{2i} + \dots + b_n D_{ni}] \quad (65-2)$$

إن المقدار $[b_1 D_{1i} + b_2 D_{2i} + \dots + b_n D_{ni}]$ هو المنشور للمحدد الناتج عن محدد المصفوفة A بعد استبدال عموده i بالعمود B ولنرمز له بـ $\det A_i$ وبذلك يكون لدينا:

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \det A_i; i = 1, 2, \dots, n \quad (66-2)$$

مثال:

استخدم قاعدة كرامر في حل جملة المعادلات (الواردة في المثال السابق).

الحل:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 15 \Rightarrow x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{15}{-3} = -5$$

2-21 قوى مصفوفة:

2-21-1 تعاريف:

(1) إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن:

$$A^n = A \cdot A \cdot A \dots A \text{ (مرة } n \text{)}; n \in N \quad (67-2)$$

هي مصفوفة A مرفوعة للأس n . (المصفوفة $A^0 = 1$ هي المصفوفة الواحدية).

(2) تسمى المصفوفة المربعة A خاملة أو متساوية القوى: إذا كان $A^2 = A$ وتكون معدومة القوى إذا كان

$A^n = 0; (n > 0)$ وتسمى n مرتبة الانعدام و 0 هي المصفوفة الصفرية.

(3) المصفوفة المربعة A من المرتبة n تسمى دورية: إذا وجد عدد طبيعي $(0 < a)$ ، بحيث $A^a = I_n$ وإن أصغر

عدد طبيعي موجب يحقق هذا الشرط يسمى دور المصفوفة A .

2-21-2 خواص قوى مصفوفة: إذا كانت A مصفوفة مربعة و α, β عددين صحيحين غير سالبين فإن الخواص

التالية صحيحة:

$$A^\alpha \cdot A^\beta = A^{\alpha+\beta} \quad (1)$$

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha \cdot \beta} \quad (2)$$

2-21-3 تعريف القوى الصحيحة السالبة لمصفوفة مربعة: كما يلي: $(A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1}$

$$A^{-3} = A^{-1} \cdot A^{-2}$$

$$A^{-n} = A^{-1} \cdot A^{-(n-1)}$$

وبالتالي نستنتج:

$$A^{-m} \cdot A^{-n} = A^{-(m+n)}$$

$$(A^{-m})^n = A^{-mn}$$

أمثلة:

-1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خاملة لأن:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

-2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معطومة ومرتبة انعدامها الثالثة وذلك لأن:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

دورية ودورها $a = 4$ لأن:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

22-2 كثيرة حدود مصفوفة:بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n; (a_0, a_1, \dots, a_n \text{ معاملات})$$

إن التركيب :

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n \quad (68-2)$$

يسمى كثيرة حدود بـ A ويرمز له بالرمز $f(A)$ و I مصفوفة واحدة من مرتبة المصفوفة A و $f(A)$ من المرتبة n نفسها ، وإذا كان $f(A) = 0$ نقول عن A إنها جذر $f(x)$.

مثال:

لتكن كثيرة الحدود:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

والمصفوفة:



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $f(A)$.

الحل:

$$f(A) = A^2 + 2A - 3I_2$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

23-2 أثر مصفوفة مربعة:

بفرض A مصفوفة مربعة من الدرجة n . إن مجموع عناصر القطر الرئيسي في $A = [a_{ij}]_n$

يسمى أثر المصفوفة A ونرمز له بالرمز $tr(A)$ أي أن:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (69-2)$$

مثال:

إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد $tr(A)$.

الحل:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} = 3 + 3 = 6$$

- الملاحظة الأولى :

- اتباع : هو علاقة بين مجموعتين X, Y حيث يرتبط كل عنصر $x \in X$ بعنصر واحد $y \in Y$ ويكتب بالشكل :

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{و} \quad x \longrightarrow f(x)$$

حيث تدعى X مجموعة تعريف التابع و Y تدعى مستقر التابع

- مجموعة التعريف : ومجموعة القيم :

نسمي القيم التي يأخذها العنصر x والتي تكون عندها الدالة معرفة بمجموعة تعريف التابع و نرمز لها بالرمز $D(f)$.

كما نسمي مجموعة القيم التي تأخذها الدالة عندها يأخذ العنصر x جميع القيم هذه

مجموعة التعريف : مجموعة قيم التابع و نرمز لها بالرمز $W(f)$

مثال : لتكن لدينا الدالة

$$y = x + 2$$

هنا نلاحظ أنه :

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$W(f) = \mathbb{R}$$

(بعض أنواع المتابع :

1- المتابع البصيرة : تأخذ الشكل التالي :

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

و يمكن أيضاً كتابة الحدود من الدرجة n وهذا يكون $D(P) = R$

$$P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 4$$

مثال :

الدالة السابقة هي كثير حدود من الدرجة الثالثة و مجموعة تعريفها هي R .

2- المتابع الكسرية : تأخذ الشكل التالي :

$$P(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

مجموعة التعريف هنا هي جميع القيم ما عدا القيم التي تقدم المقام

مثال :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$$

مجموعة التعريف هي R ما عدا القيم التي تقدم المقام و كل بجا و مجموعة

التعريف تقدم المقام أدنى

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

فمنه يكون ،

$$D(f) = \{ \mathbb{R} \setminus \{-5\} \}.$$

3- السابغ إلهاء (الجزئية) . مستطاب العام

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

والمجموعة التعريف هي جميع القيم لـ $g(x)$ تكون ما داخل الجذر أكبر أو يساوي الصفر أي :

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} ; g(x) \geq 0 \}$$

مثال : ليكن لدينا الدالة :

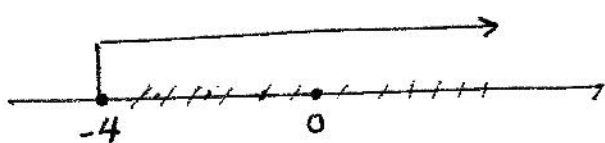
$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

لدينا :

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} ; x+4 \geq 0 \}$$

$$x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$$

$$\Rightarrow D(f) = \{ x \in \mathbb{R} ; x \geq -4 \}$$



و يمكن تمثيل كل في مستقيم / خط

$$D(f) = [-4, +\infty[$$

مسألة لكل : أوجد مجموعة تعريف الدالة التالية :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-4}}$$

4- المتتابع اللوغاريتمية : شكلها العام $f(x) = \ln(g(x))$

مجموعة التعريف لها هي جميع القيم بشرط أن يكون ما داخل اللوغاريتم أكبر من 0
من إحصاء أي :

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} ; g(x) > 0 \}$$

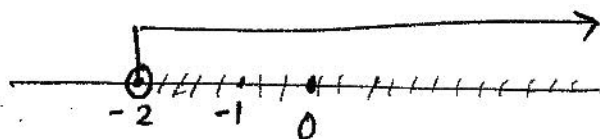
مثال : لنأخذ الدالة :

$$f(x) = \ln(x+2)$$

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} ; x+2 > 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} ; x > -2 \}$$

ويمكن تمثيل كل مستقيم إزاحة كما يلي :



$$D(f) =]-2, +\infty[$$

5 - المتابع الزوجية : نقول عندالة $f(x)$ زوجية اذا حققت الشرط التالي :

$$f(-x) = f(x)$$

مثال : هل الدالة $f(x) = x^2$ هي دالة زوجية ؟

الحل : لمبدأ :

$$f(x) = x^2$$

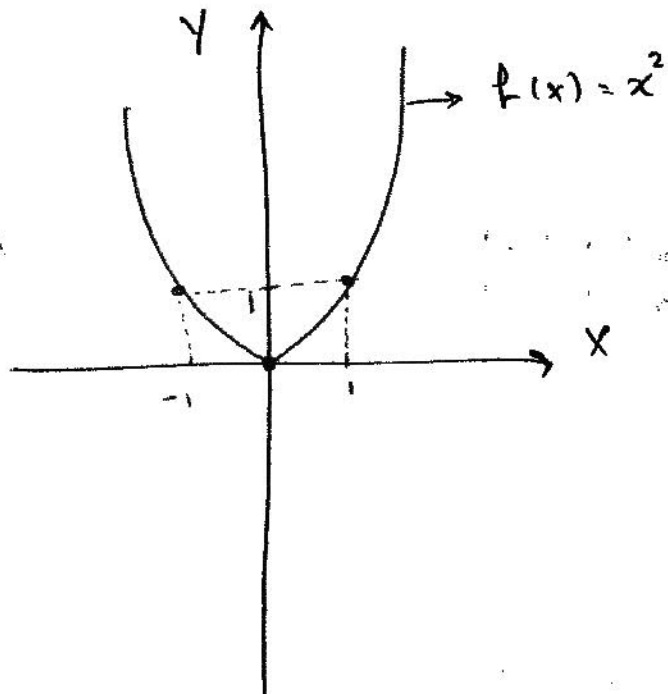
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

لما سبقه فلا شك انه

$$f(-x) = f(x)$$

ومنه لهذه الدالة هي دالة زوجية لتوفر التمثيل البياني لهذه الدالة

x	0	1	-1
$f(x)$	0	1	1



وهنا نلاحظ انه لهذه الدوال تكون متناظرة بالنسبة للمحور oy

6- المتابع الفردية: نقول عن دالة الخدالة فردية اذا حققت الشرط في

$$f(-x) = -f(x)$$

مثال: هل الدالة $f(x) = x^3$ هي دالة فردية؟

اكثر: لنأخذ $x=2$ ونحسب:

$$f(-2) = (-2)^3 = -8$$

$$f(2) = (2)^3 = 8 \Rightarrow -f(2) = -8$$

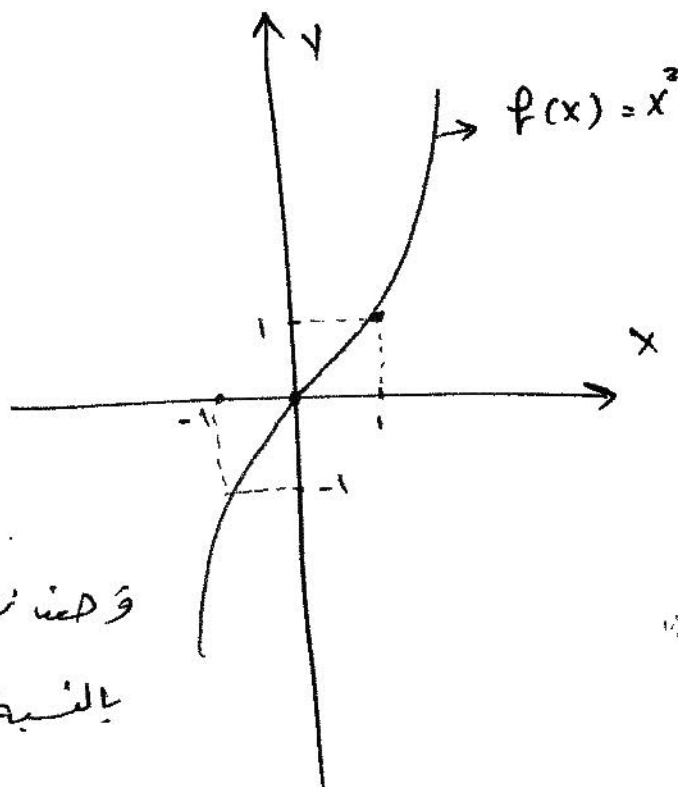
لما سبقه نلاحظ انه:

$$f(-2) = -f(2)$$

ومنه الدالة $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.

الموجود التمثيل البياني في:

x	0	1	-1
f(x)	0	1	-1



ولمنا نلاحظ انه الدالة هنا فردية
بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

- الجا صفة الثانية - المشتقات وتطبيقاتها -

أهم قواعد الاشتقاق .

1 - مشتقة الجداء الثابت يساوي صفر : أي صفر ١ صفر

$$y = c \Rightarrow y' = 0$$

2 - مشتقة دالة المتحول x يساوي الواحد أي :

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

3 - مشتقة دالة الجداء بعدد :

$$y = A u \Rightarrow y' = A u'$$

4 - مشتقة المتحول المنقول الأس x^n :

$$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

5 - مشتقة الجداء والتين يساوي مشتقة الأول ضرب الثاني زائد مشتقة الثاني ضرب الأول أي :

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

6 - مشتقة الكسر يساوي مشتقة البسط ضرب المقام ناقص مشتقة المقام ضرب

البسط مقسوماً على مربع المقام أي :

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

7- مشتقة الدالة الجذرية يساوي مشتقة ما تحت الجذر مقسومة على ضعف الجذر
أي :

$$y = \sqrt{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

8- مشتقة الدالة اللوغاريتمية يساوي مشتقة ما تحت اللوغاريتم مقسومة على ما تحت اللوغاريتم أي :

$$y = \ln(f) \Rightarrow y' = \frac{f'}{f}$$

9- مشتقة الجداء أكثر من دالة :

$$y = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n$$

$$\Rightarrow y' = u_1' \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot u_3 \dots u_n + \dots + u_1 \cdot u_2 \dots u_n'$$

10- مشتقة لدوال التثلوية :

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cdot \cos x$$

حيث u هي دالة تابعة لـ x

مثال :

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \sin x^3 \Rightarrow y' = (3x^2) \cdot \cos x^3$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

مثال :

$$y = \cos(2x) \Rightarrow y' = -2 \sin 2x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$$

و لهذا نوجه قانون آفرينگذا به عنوان

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و به شكل عام :

$$y = \tan u \Rightarrow y' = (1 + \tan^2 u) \cdot u'$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

١١ - مشتقة الدالة الأسية :

$$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

مثال :

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

- مجموعة من القوانين الخاصة بالاشتقاق :

أولهم مشتقة الدوال الثابتة :

$$(1) \quad y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$(2) \quad y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$$

$$(3) \quad y = \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow y = x^{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

تذكيرة

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

$$(5) \quad y = x^2 \cdot \sin x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow y' = 2x(\sin x \ln x) + \cos x(x^2 \ln x) + \frac{1}{x}(x^2 \sin x)$$

$$= 2x \sin x \ln x + x^2 \cos x \ln x + x \sin x$$

$$(6) \quad y = (2x^3 + 3x) \cdot (3 - 2x)$$

$$\Rightarrow y' = (6x + 3) \cdot (3 - 2x) + (-2)(2x^3 + 3x)$$

$$(7) \quad y = \sin^3 x \Rightarrow y = (\sin x)^3$$

$$\Rightarrow y' = 3 \cdot (\sin x)^2 \cdot (\cos x)$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{4} \cdot \sin^4(2x) \Rightarrow y = \frac{1}{4} [\sin(2x)]^4$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot [\sin 2x]^3 \cdot [2 \cos(2x)]$$

$$= 2 [\sin(2x)]^3 \cdot \cos(2x)$$

$$(9) y = \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{\sin x}} = \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{\sin x}} \right)$$

$$\Rightarrow y = \ln(\sqrt{1+x^2}) - \ln(\sqrt{\sin x})$$

تذكرة
 $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$$\Rightarrow y = \ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \ln(\sin x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(\sin x)$$

تذكرة
 $\ln a^b = b \cdot \ln a$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cot x$$

$$(10) y = x^x$$

في مثل هذه الأسئلة نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x$$

نستعمل القواعد :

$$\frac{y}{y} = \ln x + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y [\ln x + 1]$$

$$\Rightarrow y' = x^2 [\ln x + 1].$$

$$(11) \quad y = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(3x^2 - 2)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(x^3 - 2x)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$(12) \quad y = 3x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{6}{5}} - 2x^{\frac{4}{3}} + 2$$

$$\Rightarrow y' = 3 \left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \right] + 5 \left[\frac{6}{5} x^{\frac{1}{5}} \right] - 2 \left[\frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} \right] + 0$$

$$= \frac{9}{2} x^{\frac{1}{2}} + 6 x^{\frac{1}{5}} - \frac{8}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$(13) \quad y = (\tan x)^3 - 3 \tan x + 3x$$

$$\Rightarrow y' = 3(\tan x)^2(1 + \tan^2 x) - 3(1 + \tan^2 x) + 3$$

$$(14) \quad y = \cos(\sin 2x)$$

$$\Rightarrow y' = \cos u \quad \text{لنفرض ان } \sin 2x = u \text{ عنده يكون}$$

$$\Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u \quad ; \quad u' = 2 \cos(2x)$$

$$\Rightarrow y' = -[2 \cos 2x] \cdot \sin[\sin 2x]$$

$$(15) \quad y = (\cos x)^{\sin x}$$

هنا اثنان لكل .

$$(16) \quad y = \sin[\sin(\sin x)]$$

هنا اثنان لكل .

- تنتقل الآن لدراسة المشتقات الجزئية.

عندما تكتب $z = f(x, y)$ نفهمه اننا نكتب ان z تابعة للمتغيرين x و y اي انه z تتغير بتغير كل من x و y .

ولفنا عندما نكتب انه z تابع مستقله لـ x يعني انه z لا تتغير بتغير x اي ان z مستقله عن x بالتحديد. اي ان z لا تتغير بتغير x اي ان z مستقله عن x بالتحديد.

$$z_x, \frac{\partial z}{\partial x}$$

وشرط المشتقة z بالنسبة لـ y بالرمز

$$z_y, \frac{\partial z}{\partial y}$$

وعندما نكتب z_x مثل z هنا نعامل y معاملة ثابتة والعكس بالعكس.

اي انه عندما نريد ان نكتب z_y هنا نعامل x معاملة ثابتة.

أخيرا: اذهب المشتقات الجزئية من المبريد / اذهب (z_x, z_y) حيث:

$$\textcircled{1} z = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

$$(2) \quad z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

لتفرض ان $\frac{x}{y} = u$ عندئذ يكون :

$$\Rightarrow z = \sin u$$

$$\Rightarrow z_x = u'_x \cdot \cos u \quad ; \quad u'_x = \frac{y - 0 \cdot x}{y^2} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow z_x = \frac{1}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}$$

$$z_y = u'_y \cdot \cos u \quad ; \quad u'_y = \frac{0 \cdot y - x}{y^2} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\Rightarrow z_y = -\frac{x}{y^2} \cdot \cos \frac{x}{y}$$

$$(3) \quad z = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$z_u = \frac{2u + 0 + 0}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

طريقة مماثلة تماماً فدان :

$$z_u = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

$$z_w = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

(4) $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \cos y + 0 \cdot (\sin x) = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin x = -\sin y \cdot \sin x.$$

- المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية .

وهي المشتقة الثاني بالنسبة لـ x ونرمز له بالرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

والمشتقة الثاني بالنسبة لـ y ونرمز له بالرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

والمشتقة المختلطة بالنسبة لـ x و y ونرمز له بالرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

ولذا نلاحظ أنه من أجل حساب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لا بد لنا من حساب المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى.

أمثلة: أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للدوال التالية.

$$\textcircled{1} \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = \sin x + \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(3) f(x, y) = xy + xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + y^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6yx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 3y^2$$

$$(4) f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \ln (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(5) f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2 + y^2} + 4x^2 e^{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{x^2 + y^2} + 4y^2 e^{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy e^{x^2 + y^2}$$

$$(6) f(x, y) = e^{\sin x + \cos y}$$

المطلوب

$$(7) f(x, y) = \cos(x - y)$$

$$(8) f(x, y) = \frac{\sin x}{\cos y}$$

$$(9) f(x, y) = xy \ln x$$

نتنقل لدراسة التكامل غير المحدود .

إذا كان لدينا دالة f ، ولتكن $f(x)$ عندئذ ندرس لعملية التكامل بالرمز $\int f(x) dx$ ،
و نسمي $f(x)$ الدالة المتكاملة و نأخذ التكامل ندعوه الدالة الأصلية فنكتب :

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

حيث $F(x)$ هي الدالة الأصلية ، C ثابت ندعوه ثابت التكاملة .

ومن بعض خواص التكامل غير المحدود :

$$(1) \quad d \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

$$(2) \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(3) \quad \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

ونذكر فيما يلي جدول لبعض التكاملات الشائعة التي يجب حفظها

$$1. \quad \int A dx = Ax + C$$

$$\int 5 dx = 5x + C$$

$$\int -2 dx = -2x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} x + C.$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + C$$

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C.$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

وكتابة الصيغة تكون بالشكل:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C.$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C.$$

$$\int e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C.$$

-5- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

-6- $\int \sin x = -\cos x + C$

وكل ما يلي

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos x + C$$

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + C$$

-7- $\int \cos x dx = \sin x + C$

وكل ما يلي

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax + C$$

$$\int \cos \sqrt{2} x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \sqrt{2} x + C.$$

$$-8. \quad \int \tan x \, dx = \ln \frac{1}{\cos x} + C$$

$$-9. \quad \int \cot x \, dx = \ln \sin x + C$$

تنتقل إلى كل بعض المعادلات.

$$(1) \quad \int (1+x)^2 \, dx = \int (1+2x+x^2) \, dx$$

$$= \int 1 \, dx + \int 2x \, dx + \int x^2 \, dx$$

$$= x + 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + C.$$

$$(2) \quad \int \frac{x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{x^2} \, dx$$

$$= \int (x^2 - 6x - 8 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2}) \, dx$$

$$= \int x^2 \, dx - 6 \int x \, dx - 8 \int 1 \, dx + 9 \int \frac{1}{x} \, dx - 5 \int \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} - 8x + 9 \ln x - 5 \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 8x + 9 \ln x - 5 \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 8x + 9 \ln x + 5x^{-1} + C.$$

$$(3) \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \int \frac{1}{2} dx + \int -\frac{1}{2} \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right] + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

تذكير:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$(4) \int \cos^2 x dx = ?$$

مثال لكل:

- طريقة تغيير المتحول (التعويض) في نماذج التكاملات

نقدم طريقة تغيير المتحول بفرض الحصول على تكامل بسيط أبسط من التكامل الأصلي.

أمثلة: أوجد التكاملات التالية:

$$I_1 = \int \sin x \cdot \cos x \, dx$$

الحل: لنجري تغييراً في المتحول ونفرض $\sin x = t \Rightarrow$ نشتق الطرفين نجد

$$\cos x \, dx = dt$$

نعوض ما سبقه في التكامل نجد:

$$I_1 = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$I_2 = \int x \sqrt{x-5} \, dx$$

الحل: نفرض أن: $\sqrt{x-5} = t \Rightarrow x-5 = t^2$

$$\Rightarrow x = t^2 + 5$$

نشتق: نجد

$$dx = 2t \, dt$$

نعوض في التكامل نجد:

$$I_2 = 2 \int (t^2 + 5) t \cdot t \, dt$$

$$\Rightarrow I_2 = 2 \int (t^2 + 5) t^2 \cdot dt$$

$$= 2 \cdot \int (t^4 + 5t^2) dt$$

$$= 2 \cdot \int t^4 dt + 10 \int t^2 dt$$

$$= 2 \frac{t^5}{5} + 10 \frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{x-5})^5 + \frac{10}{3} (\sqrt{x-5})^3 + C.$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{3x+5}$$

لفرض أن :

$$3x + 5 = t$$

$$\Rightarrow 3x = t - 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{t-5}{3}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

فموض في التكامل نجد :

$$I_3 = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln t$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln(3x+5) + C.$$

- طريقة التكامل بالتجزئة.

نستخدم التكامل بالتجزئة في صورتين هاتين :

١- عندما يكون أحد الحدودين احداهما دالة مشتقة للأخرى.

٢- عندما يكون $\ln$ جزء من التكامل.

٣- مع الدوال العكسية مثل:

$$\arcsin x$$

$$\arccos x$$

$$\arctan x$$

ولمنا لانه لنا ان نذكر ليوتانيين الا مشتقات الدوال العكسية العكسية.

$$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

أمثلة: باستخدام طريقة التجزئة أنجز التكاملات التالية:

$$I_1 = \int \ln x \, dx$$

ملاحظة: في هذه التكاملات الدالة التي لا تعرفها هي نتاج تكامل نقرضها u

والمجزر إليها من السؤال نقرضه dv

لتفرض:

$$u = \ln x \Rightarrow dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} \cdot dx, \quad v = x$$

مكتب ماثون القبرية:

$$I_1 = u \cdot v - \int v \, du$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

$$I_2 = \int x \cdot \cos x \, dx$$

الحل: لتفرض:

$$u = x \quad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx \quad v = \sin x$$

$$\Rightarrow I_2 = u \cdot v - \int v \, du$$

$$= x \sin x - \int \sin x \cdot dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

ملاحظة: في بعض الأحيان نحتاج لإجراء عملية التجزئة أكثر من مرة كما في المثال التالي

$$I = \int x^2 \cdot e^x dx$$

$$u = x^2$$

$$dv = e^x \cdot dx$$

نفرض أن

$$du = 2x dx$$

$$v = e^x$$

$$\Rightarrow I = u \cdot v - \int v du$$

$$= x^2 \cdot e^x - \underbrace{2 \int x e^x dx}_{I_1} \Rightarrow I = x^2 e^x - 2 I_1 \quad \dots \star$$

$$I_1 = \int x e^x dx$$

نفرض:

$$u = x$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = dx$$

$$v = e^x$$

$$I_1 = u \cdot v - \int v du$$

$$= x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x$$

نفرض قيمة I_1 في المعادلة $\star$ نجد:

$$I = x^2 e^x - 2 [x e^x - e^x] + C$$

$$I = \int x \cdot \arctan x \, dx$$

مثال :

لتقريب :

$$u = \arctan x \quad dv = x \, dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = u \cdot v - \int v \, du$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{x^2}{1+x^2} dx}_{I_1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} I_1 \quad *$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$$

$$= \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{-1}{1+x^2} dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x - \arctan x$$

لنوضوحية I_1 في السطر * نجد :

$$I = \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} [x - \arctan x] + C$$

$$I = \int x \cdot \ln x \, dx$$

لتعرف:

$$u = \ln x \quad dv = x \cdot dx$$

$$du = \frac{1}{x} \cdot dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$I = \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

مثال:

لتعرف:

$$u = e^x \quad dv = \sin x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \quad v = -\cos x$$

$$I = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$= -e^x \cdot \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{I_1}$$

$$\Rightarrow I = -e^x \cos x + I_1 \quad \text{--- *}$$

نفس نتيجة I_1 :

$$I_1 = \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

لنفرض:

$$u = e^x \quad dv = \cos x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \quad v = \sin x$$

$$\Rightarrow I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow I_1 = e^x \sin x - I$$

نقوم بنقل I_1 في الطرف * نجد:

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$\Rightarrow 2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow I = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

هذا هو الجواب.

$$I = \int e^{3x} \cdot \sin 2x \, dx.$$

$$I = -\frac{2}{13} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \sin 2x + C.$$

مع العلم ان الناتج هو:

$$I = \int \ln(1+x^2) dx$$

لتقريب:

$$u = \ln(1+x^2) \quad dv = dx$$

$$du = \frac{2x}{1+x^2} dx \quad v = x$$

$$\Rightarrow I = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$= x \cdot \ln(1+x^2) - \underbrace{2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx}_{I_1}$$

$$\Rightarrow I = x \cdot \ln(1+x^2) - 2 I_1 \quad \dots \star$$

لنبحث في I_1 :

$$I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{-1}{1+x^2} dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x$$

نوضح في اسطرته $\star$ ثمة:

$$I = x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x) + C.$$

بعض المعادلات التربيعية : إذا كان لدينا معادلة $ax^2 + bx + c = 0$ شكلها العام

بسيطة من الدرجة الأولى عند تقسيم كلا المعادلتين a و b بنوعه جذور هذه المعادلة

وكلتا هذه الجذور هي مشتركة a, b, c, d ثم نكتب المعادلتين $ax^2 + bx + c = 0$ و $dx^2 + ex + f = 0$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

والجواب x ذلك : ليكن لدينا المعادلة التربيعية : $x^2 - 5x + 6 = 0$

لنوجد حلول هذه المعادلة باستخدام طريقة تسمى "التمثيل" $x^2 - 5x + 6 = 0$ (طريقة التمثيل)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 25 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

وبالتالي نكتب المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ شكلها العام $ax^2 + bx + c = 0$ من الدرجة الأولى كما يلي

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

لنتقل الآن إلى دراسة المقادير الكسرية.

ونبدأ بتعريف الكسور.

ليكن لدينا الكسري $\frac{P(x)}{g(x)}$ شرط تفرقة هذا الكسر ان تكون درجة $P(x)$ افرتماتاً من درجة $g(x)$.

سنعالج مع حالتين فقط من حالات تفرقة الكسر.

الحالة الأولى: يكون لدينا كثير حدود $g(x)$ ميل جذور بسيطة حادة أو يكتب بالشكل:

$$g(x) = (x-a)^m \cdot g_1(x)$$

ولنا هنا مثال ٢ من الحالة $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ ولفرضه هذا الكسر إلى

مجموع عدد من الكسور البسيطة كما يلي:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

لذلك لأننا هنا هو ايجاد قيم الثوابت A, B, C, D ، وذلك تكون عملية التفرقة قد تمت.

الخطوة التالية هي ان نوجد المقادير ثم نكتبها ، ولكن

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

$\frac{1}{x(x-1)^3} \quad \frac{A}{(x-1)^3} \quad \frac{B}{x} \quad \frac{C}{x(x-1)} \quad \frac{D}{x(x-1)^2}$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = A[x^3 - 3x^2 + 3x - 1] + Bx + C[x^2 - x] + Dx[x^2 - 2x + 1]$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + Bx + Cx^2 - Cx + Dx^3 - 2Dx^2 + Dx$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = [A+D]x^3 + [-3A+C-2D]x^2 + [3A+B-C+D]x + [-A]$$

الآن نقوم بعملية المطابقة ونكتب:

$$A + D = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$-3A + C - 2D = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$3A + B - C + D = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$-A = 1 \quad \text{--- (4)}$$

من المعادلة (4) نجد أن $\boxed{A = -1}$ نعوض في المعادلة (1) نجد:

$$-1 + D = 1 \Rightarrow \boxed{D = 2}$$

نعوض قيمة A, D في المعادلة (2) نجد:

$$3 + C - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

نعوض القيم السابقة في المعادلة (3) نجد أن

$$\boxed{B = 2}$$

المزاد نعرض قيم الثوابت التي حصلنا عليها في الجدول * ونكتب:

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

وبذلك نكون قد فرقنا الكسر البعدي إلى عدد من الكسور البسيطة.

والسؤال الذي يطرح في الإصدار هو:

أليجز التكامل التالي:

$$I = \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx.$$

هنا نجز هذا التكامل يجب أن نقوم بالخطوات السابقة التي فعلناها في يجب

أنه نقره الكسر البسيط إلى مجموع عدد من الكسور البسيطة والتي غالباً ما يكون

تفاضل أسهل من التكامل الأصلي.

المزاد لنعود لحل هذا التكامل حيث نعيد من السؤال السابقة في منه عملية تفريقه

الكسور. حيث نكتب:

$$I = \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx = \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} \right] dx$$

$$= \int \frac{-1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx$$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
 I_1 I_2 I_3 I_4

الآن نبر كل من الكسرات أربعة بسبعة كد منها كما مره.

$$I_1 = \int \frac{-1}{x} dx = - \int \frac{1}{x} dx = - \ln x.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = 2 \cdot \int (x-1)^{-3} dx = 2 \cdot \frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} \\ &= 2 \cdot \frac{(x-1)^{-2}}{-2} \\ &= - (x-1)^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} dx \\ &= \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} = - (x-1)^{-1} \end{aligned}$$

$$I_4 = 2 \int \frac{1}{x-1} dx = 2 \cdot \ln(x-1)$$

$$\Rightarrow I = - \ln x - (x-1)^{-2} - (x-1)^{-1} + 2 \ln(x-1) + C.$$

الآن لننتقل لهذا يكون القوس المكرر يحوي كثير حدود من الدرجة الثانية

أي له الشكل التالي:

$$g(x) = (x^2 + ax + b)^n \cdot g_1(x)$$

مثال: عرّف الكسر البسيط إلى مجموع كسور بسيطة:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

الحل: صيغة بسيطة نستطيع ان نكتب

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 + 1} \quad *$$

الآن نوجد قيمته عند وضعه:

$$x^3 + x^2 + 2 = A_1 x + B_1 + (A_2 x + B_2) \cdot (x^2 + 1)$$

$$= A_1 x + B_1 + A_2 x^3 + A_2 x + B_2 x^2 + B_2$$

$$= [A_2] x^3 + [B_2] x^2 + [A_1 + A_2] x + [B_1 + B_2]$$

بالمطابقة نجد:

$$A_2 = 1$$

$$B_2 = 1$$

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$B_1 + B_2 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = 1 \\ B_2 = 1 \\ A_1 + A_2 = 0 \\ B_1 + B_2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A_2 = 1} \\ \boxed{B_2 = 1} \\ \boxed{A_1 = -1} \\ \boxed{B_1 = 1} \end{array}$$

نُوضِّعُ الْقِيَمَ الْبَاقِيَةَ فِي السَّرْعَةِ * نُجِدْ:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x + 1}{x^2 + 1},$$

مَعْلُومَةٌ: أُنْجِزُ التَّعَامُلَ الْبَاقِي:

$$I = \int \frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx.$$

الْحَلُّ: لِنَأْخُذْ مَعَامِلَ الْخَاصَّةِ وَنُحَاوِلْ كُنَافَتَهُ فِي شَكْلِ جِبَارٍ أَوْاسِي:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{x}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx$$

لِأَنَّهُ تَفَرَّقَ الْإِلَاحَةُ الْخَاصَّةُ إِلَى جُزْءٍ كَسْرِيَّةٍ بَسِيطَةٍ لَمَّا يَلِي:

$$\frac{x}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \quad \dots \star$$

لَوْ هَدِجْنَا حَالَهُ وَنُحَدِّثُهَا:

$$x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

نشر ونطابقه فصل ٤ :

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ B + C = 1 \\ C + A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A = -\frac{1}{2}} \\ \boxed{B = \frac{1}{2}} \\ \boxed{C = \frac{1}{2}} \end{array}$$

فرض کنیم این به این صورت است *

$$\frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{x+1} dx}_{I_1} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{x+1}{x^2+1} dx}_{I_2}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \dots \dots \dots *$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1).$$

$$I_2 = \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) + \arctan x$$

لنوضح نتيجة I_1 و I_2 في ★

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \cdot \arctan x + c.$$

حاصل أخير: أنجز التفاضل لتدري:

$$I = \int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$$

الحل: نعلم بكتابة المقام في صورة المعادلة $x^2 - x - 2$ شكل $(x+1)(x-2)$ كما يلي:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

الآن نطبق الأسر المخرج كوربيط كما يلي:

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \quad \star$$

لنوجد قيم A و B من:

$$3x = A(x-2) + B(x+1)$$

$$= Ax - 2A + Bx + B$$

$$= [A+B]x + [-2A+B]$$

بالإضافة نجد

$$\left. \begin{array}{l} A+B=3 \\ -2A+B=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A=1} \\ \boxed{B=2}$$

نحوض هذه القيم في إسارنته * نجده :

$$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{x+1} dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$= \ln(x+1) + 2 \cdot \ln(x-2) + C.$$

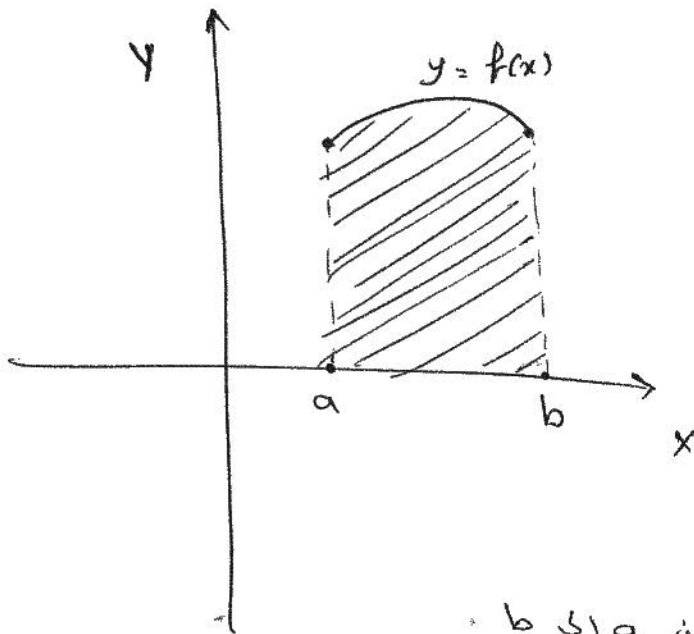
تتقل الأنة الى التظاملات المحدودة

- التكامل المحدود -

إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$ حيث $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a, b]$ ، فإن
 $f(x) \geq 0$ في طول المجال وبغيره فإن $F(x)$ هي الدالة التكاملية لـ $f(x)$ عند

نفس التكامل المحدود،

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$



أي أن البعض المسمى التكامل المحدود من a إلى b .

للعناية عن مساحة المنطقة المحصورة بين الخط البياني للتابع والمستقيمة الموازية

للمحور، لبرأيتي $x = a, x = b$ ومحور التوازي.

مثال: أوجد قيمة التكامل المحدود للتابع:

$$f(x) = -x^2 + 9$$

المجال $[0, 3]$ وماذا تعني قيمة هذا التكامل؟

الكل:

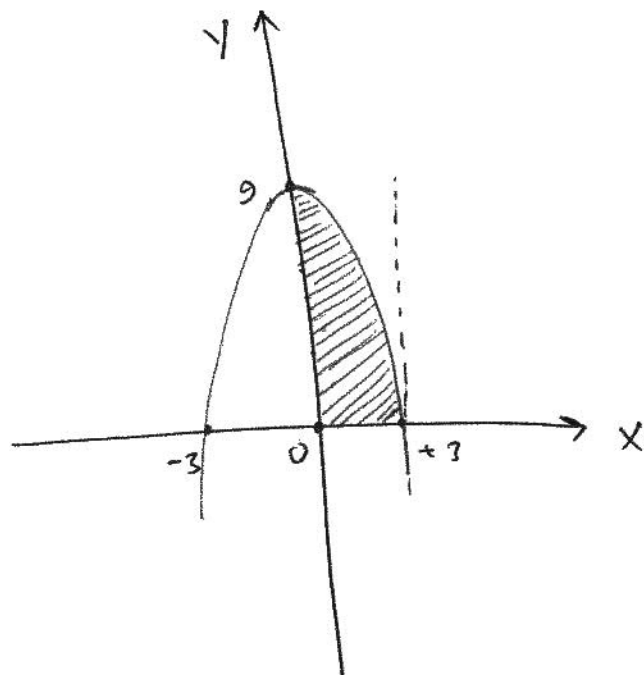
$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 9) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_0^3 = \left[\left(-\frac{(3)^3}{3} + 9(3) \right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 9(0) \right) \right]$$

$$= -9 + 27 = 18$$

لدينا: $y = -x^2 + 9$

x	0	3	-3
y	9	0	0



ما سيقدمه الآن: قيمة التكامل التي وجدناها هي عبارة عن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $f(x) = -x^2 + 9$ والمحور الأفقي والعمودي.

$$x=0, x=3.$$

من تطبيقات التكامل المحدود:

١- مساحة: كتاب المساحة المصورة بين منحنى لتابع ومحور الفواصل.
- يجب أن نرسم الخط البياني للتابع أولاً ومنه نعلم أنه إذا كانت موجبة إذا وقعت فوق
محور الفواصل أي إذا كان $f(x) > 0$ وتكون سالبة إذا وقعت تحت محور الفواصل ولذا نرسم
منحنى لتابع. ثم نكتب المساحة الموجبة أولاً ثم السالبة ونأخذها بالقيمة المطلقة
ونجمع القيم السابقة في حال طلبنا مساحة المنطقة الكلية.

مثال: احسب المساحة المحدودة بمنحني لتابع $y = 2x$ من $x=0$ إلى $x=1$
والواقعة فوق محور الفواصل فقط.

الحل:

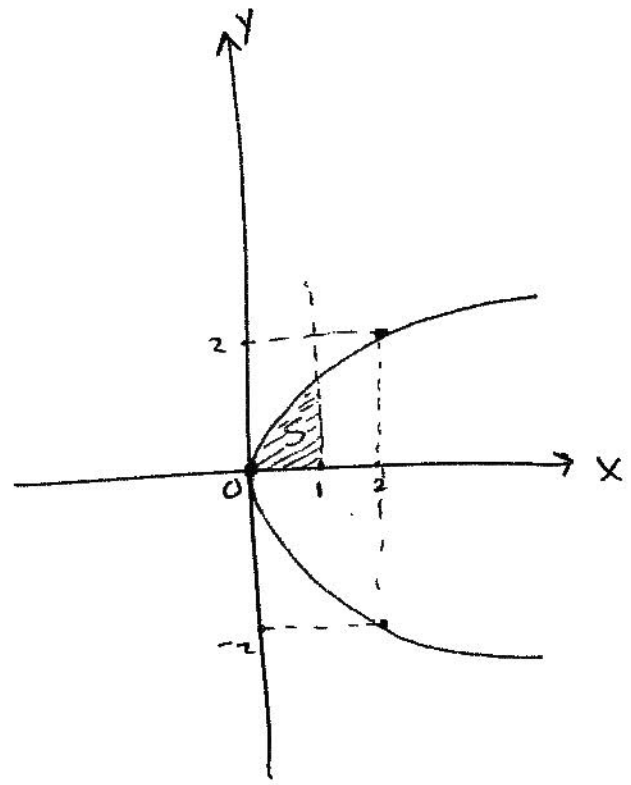
$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 y dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2x} dx = \int_0^1 \sqrt{2} \sqrt{x} dx$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \sqrt{2}.$$

x	0	2	2
y	0	2	-2



مساحة: $y = \ln x$ ، وحدد الفواصل والاستقيم

مساحة: $y = \ln x$ ، وحدد الفواصل والاستقيم

$x = e$ الى $x = 1$

الحل:

$$S = \int_1^e \ln x \, dx$$

نكتب هذا التكامل بطريقة التجزئة.

$$u = \ln x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$$

$$\begin{aligned} S &= uv \Big|_1^e - \int_1^e v \, du \\ &= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx \end{aligned}$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - [x]_1^e$$

$$= [e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln(1)] - [e - 1]$$

$$= [e - 0] - [e - 1] = 1.$$

تذكيرة

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(1) = 0$$

مثال: اوجد مساحة الواقعة تحت منحنى $y = -x^2 + 4x$ و الواقعة

موجة محور التوازي.

الحل: اذكر لنا نقاط تقاطع المنحنى مع محور التوازي، وذلك من خلال حل المعادلة

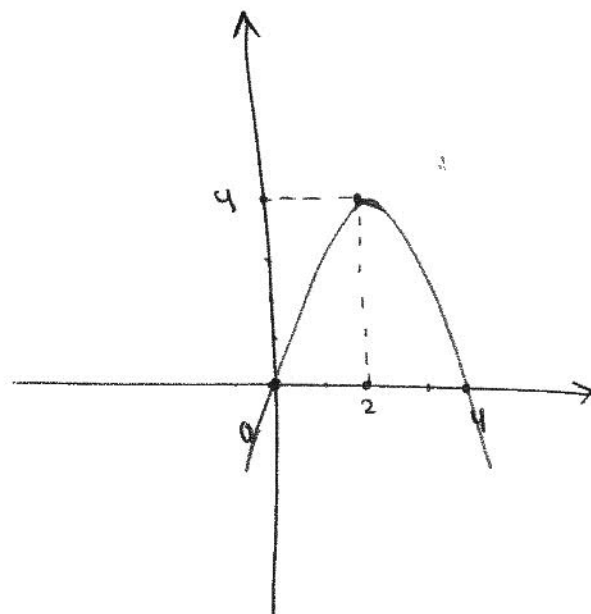
$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x[-x + 4] = 0$$

$$x = 0 \quad : \text{نقطة ا} \quad :$$

$$x = 4 \quad : \text{نقطة ب} \quad :$$

x	0	2	4
y	0	4	0



$$\Rightarrow S = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

ومن تطبيقات التكامل المحدود:

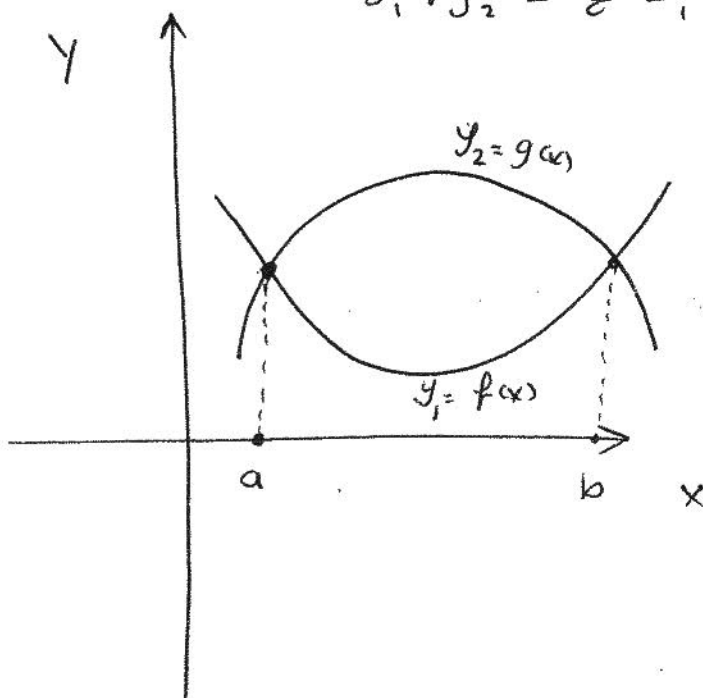
2- مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين متبايعين

دعونا نأخذ مثالاً، $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = g(x)$. فإذا كان $y_2 - y_1 > 0$ عند x يكون

دعونا نأخذ مثالاً، المنطقة المحصورة بين منحنيين متبايعين يمكن إيجادها بالصيغة:

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

حيث a, b هما نقاط التقاطع لـ y_1, y_2

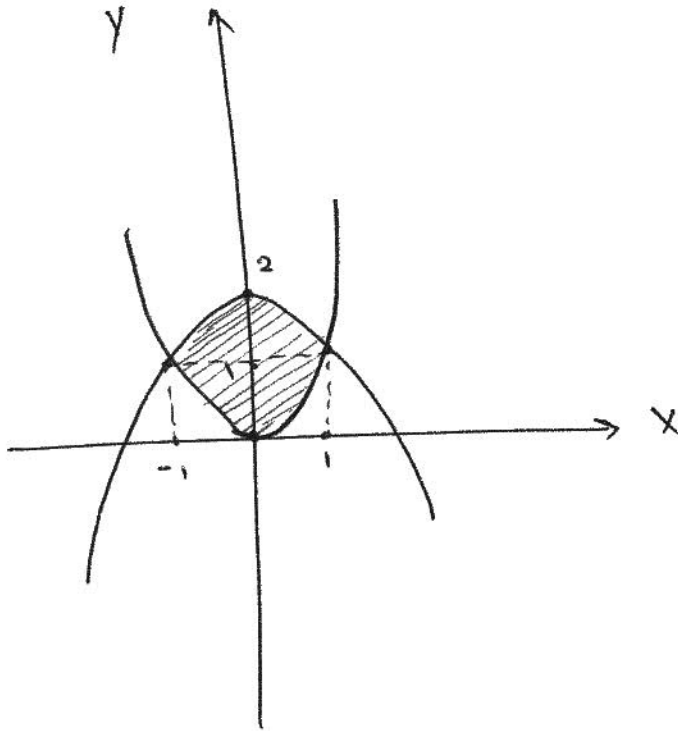


مثال: احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين التاليين: $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2 - x^2$

الحل:

x	0	1	-1
y_1	0	1	1

x	0	1	-1
y_2	2	1	1



نلاحظ من الشكل السابق أنه نقاط التقاطع هي $x = -1$ و $x = 1$

$$y_1 = x^2$$

ويمكن حساب هذه المساحة باستخدام التكامل

$$y_2 = 2 - x^2$$

نأخذ:

$$y_1 = y_2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 - x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

كما سبقه يكون :

$$S = \int_{-1}^1 (y_2 - y_1) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x^1) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (2 - 2x^2) dx$$

$$= 2 \left[2x - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = 2 \left[2 - \frac{2}{3} - (0 - 0) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{4}{3} \right] = \frac{8}{3}.$$

مثال : اوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$ والخط $x=1$

الحل : اذكر لوجه موافق نقاط التقاطع حيث نكتب

$$y_1 = y_2$$

$$\Rightarrow e^x = e^{-x}$$

$$\Rightarrow x = -x$$

$$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

وهذه نقاط موافق التقاطع هي $x=0$ و $x=1$ ومنه يكون لدينا :

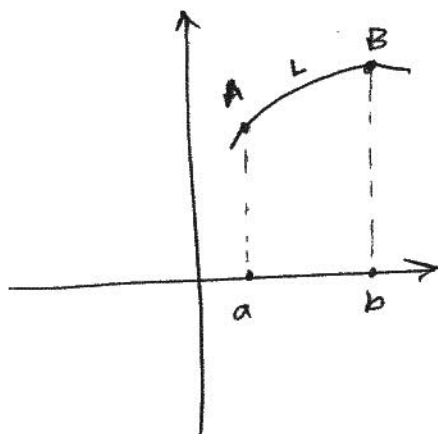
$$S = \int_0^1 (y_2 - y_1) dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

$$\Rightarrow S = \left[e^x + e^{-x} \right]_0^1 = e^1 + e^{-1} - (e^0 + e^{-0})$$

$$= e^1 + e^{-1} - 2 = e + \frac{1}{e} - 2.$$

نوعاً تصنيفاً التفاضل المزدوج

3- حساب طول منحنى: ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ وليكن ضعه البياني



موضح بالشكل:

عندئذ يكون طول المقني (المعوس) من النقطة A إلى النقطة B معطى بالصيغة التالية:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

حيث a, b هي ضواصل النقط A, B .

مثال: باستخدام التفاضل المزدوج حساب محيط الدائرة $x^2 + y^2 = R^2$

الحل: للسهولة لنحسب ربع محيط الدائرة ثم نضرب الناتج بـ 4.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

لدينا :

$$2x + 2yy' = 0$$

نصفه :

$$\Rightarrow yy' = -x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

نقوض في المستوي نجد :

$$L = \int_0^R \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$= \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx$$

$$= \int_0^R \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} dx$$

$$= \int_0^R \frac{\sqrt{R^2}}{y} dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx$$

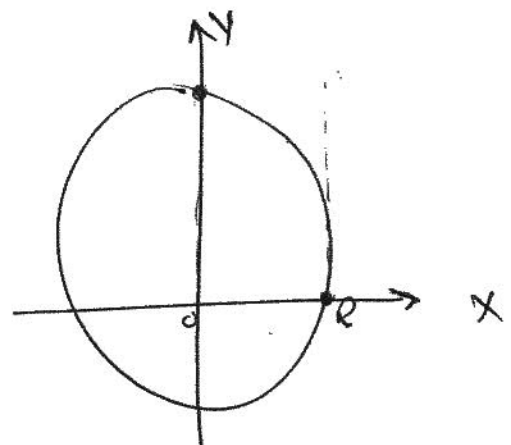
$$= \int_0^R \frac{R}{R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}} dx = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} dx$$

لتجرب نصيراً في القول لنفرض

$$u = \frac{x}{R} \Rightarrow x = Ru$$

$$\Rightarrow dx = R du$$

$$\text{حيث } x=0 \Rightarrow u=0 \quad , \quad x=R \Rightarrow u=1$$



لنحسب ثانياً :

$$L = R \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = R [\arcsin u]_0^1$$

$$= R [\arcsin(1) - \arcsin(0)]$$

$$= R \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi R}{2}$$

ومن هنا يكون المحيط المطلوب هو :

$$4 \times L = 4 \times \frac{\pi R}{2}$$

$$= 2 \pi R$$

تذكيرة

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

نلاحظ : اذا كانت لدينا المعادلة الوسيطة $x^2 + y^2 = R^2$ نطلب هنا ص y طول

القوس L عنده يجب ان نأخذ بالشكل التالي :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

مثال : لتكن لدينا الدائرة التي صارت $x^2 + y^2 = R^2$ نطلب المعادلة الوسيطة

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

الطول هب طول ربع كيط، لاذرة اى طول القوس من $\theta=0$ الى $\theta=\frac{\pi}{2}$

الحل: لدينا:

$$x' = -R \sin \theta$$

$$y' = R \cos \theta$$

$$\Rightarrow L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = R \cdot \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

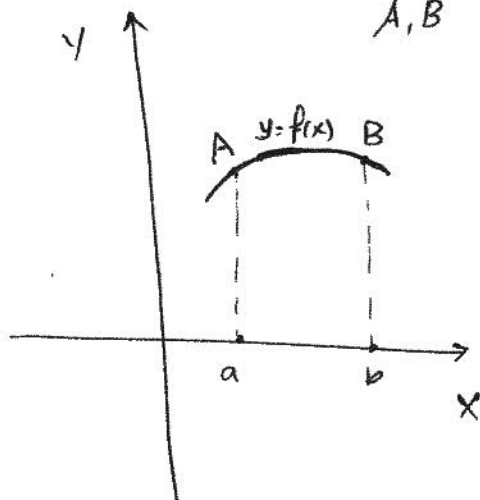
$$= R \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right]$$

$$= \frac{\pi R}{2}$$

فرضه تصفقات التقاطع المحدود.

4- بحساب حجم مجسم دوراني.

لكين لدينا المنحنى $y = f(x)$ وليكن a, b خواص الفتحة A, B



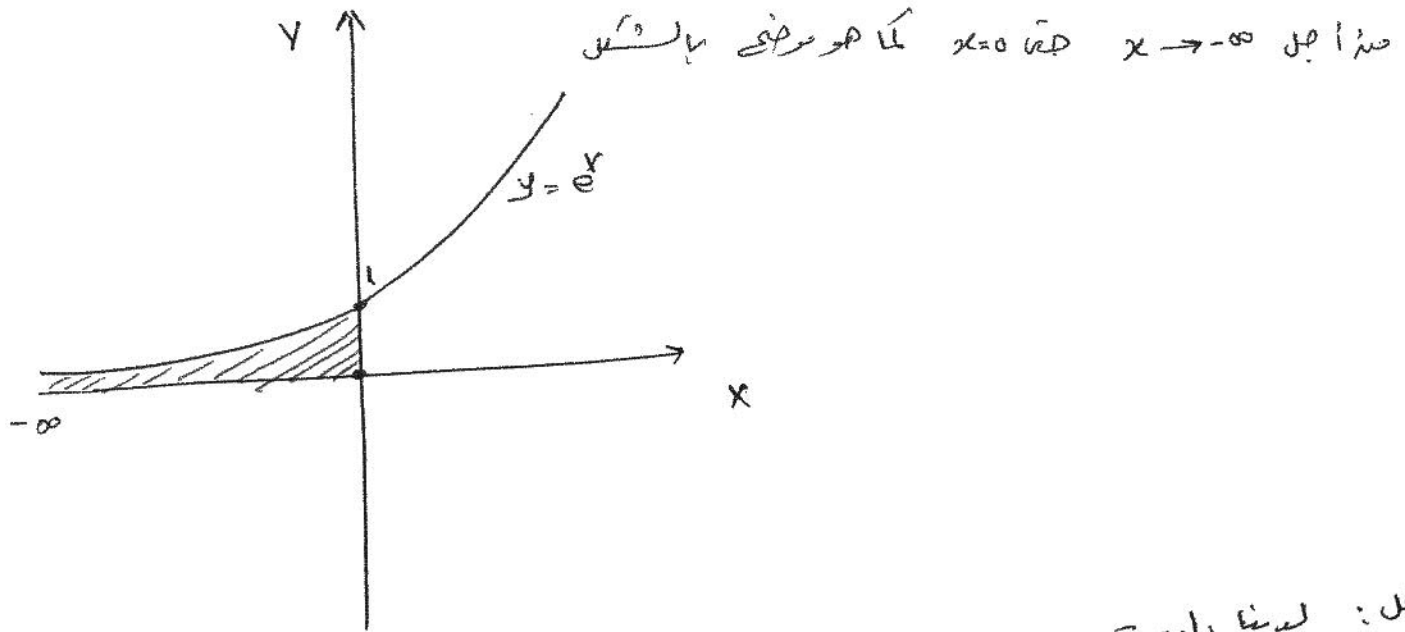
حيثا دورنا إلى $aABb$ هو المحدود OX

مباينة سطح حجم دوراني.

يعين هذا الحجم بالمتوسط

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

مثال : احسب الحجم الناتج من دوران منحنى $y = e^x$ حول المحور x من $x = -\infty$ إلى $x = 0$



الحل : لدينا المستوي :

$$V = \int_{-\infty}^0 \pi y^2 dx = \int_{-\infty}^0 \pi e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \left[e^{2x} \right]_{-\infty}^0$$

$$= \frac{\pi}{2} [e^0 - e^{-\infty}]$$

$$= \frac{\pi}{2} [1 - 0]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

منحنى y = e^x

د. محمد نور الحق

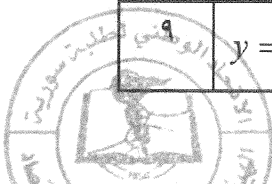
تذكرة بقواعد الاشتقاق للتوابع الشهيرة مع تمارين محلولة :

مسل	التابع	مشتق التابع
1	$y = c$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = u(x)$	$y' = u'$
4	$y = A u$	$y' = A u'$
5	$y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$
6	$y = u^n$	$y' = n u^{n-1} \cdot u'$
7	$y = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$	$y' = u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots$
8	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$
9	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
10	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
11	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
12	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
13	$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
14	$y = \tan u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u \cdot u'$
15	$y = \cot x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
16	$y = \cot u$	$y' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$
17	$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$	$y' = \sec x \cdot \tan x$
18	$y = \sec u = \frac{1}{\cos u}$	$y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$
19	$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	$y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
20	$y = \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}$	$y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \cot u \cdot u'$

21	$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
22	$y = \sin^{-1} u = \arcsin u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
23	$y = \cos^{-1} x = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
24	$y = \cos^{-1} u = \arccos u$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
25	$y = \tan^{-1} x = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
26	$y = \tan^{-1} u = \arctan u$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
27	$y = \cotan^{-1} x = \operatorname{arccot} x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
28	$y = \cotan^{-1} u = \operatorname{arccot} u$	$y' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$
29	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
30	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
31	$y = e^x$	$y' = e^x$
32	$y = e^{u(x)}$	$y' = e^{u(x)} \cdot u'$
33	$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'$
34	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

وفيما يلي جدول يبين قوانين التفاضلات لبعض التوابع الشهيرة التي نستخدمها وهو :

م	التابع	تفاضل التابع
١	$y = c$	$dy = 0$
٢	$y = x$	$dy = dx$
٣	$y = u(x)$	$dy = u' dx$
٤	$y = A u$	$dy = A u' dx$
٥	$y = x^n$	$dy = n x^{n-1} dx$
٦	$y = u^n$	$dy = n u^{n-1} u' dx$
٧	$y = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$	$dy = u'_1 dx + u'_2 dx + u'_3 dx + \dots$
٨	$y = u \cdot v$	$dy = u \cdot dv + v \cdot du$
٩	$y = \frac{u}{v}$	$dy = \frac{u \cdot dv - v \cdot du}{v^2}$



١٠	$y = \sin x$	$dy = \cos x \, dx$
١١	$y = \sin u$	$dy = \cos u \cdot u' \cdot dx$
١٢	$y = \cos u$	$dy = -\sin u \cdot u' \cdot dx$
١٣	$y = \tan x$	$dy = \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sec^2 x \, dx$
١٤	$y = \tan u$	$dy = \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \sec^2 u \cdot u' \cdot dx$
١٥	$y = \cotan x$	$dy = \frac{-1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cosec}^2 x \, dx$
١٦	$y = \cotan u$	$dy = \frac{-u'}{\sin^2 u} dx = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u' \cdot dx$
١٧	$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$	$dy = \sec x \cdot \tan x \, dx$
١٨	$y = \sec u = \frac{1}{\cos u}$	$dy = \sec u \cdot \tan u \cdot u' \cdot dx$
١٩	$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	$dy = -\operatorname{cosec} x \cdot \cotan x \, dx$
٢٠	$y = \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}$	$dy = -\operatorname{cosec} u \cdot \cotan u \cdot u' \cdot dx$
٢١	$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
٢٢	$y = \sin^{-1} u = \arcsin u$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \, dx$
٢٣	$y = \cos^{-1} x = \arccos x$	$dy = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
٢٤	$y = \cos^{-1} u = \arccos u$	$dy = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} u' \, dx$
٢٥	$y = \tan^{-1} x = \arctan x$	$dy = \frac{1}{1+x^2} dx$
٢٦	$y = \tan^{-1} u = \arctan u$	$dy = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \cdot dx$
٢٧	$y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$	$dy = \frac{-1}{1+x^2} dx$
٢٨	$y = \cot^{-1} u = \operatorname{arccot} u$	$dy = \frac{-1}{1+u^2} u' \cdot dx$
٢٩	$y = sh^{-1} x = \operatorname{argsh} x$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$
٣٠	$y = sh^{-1} u = \operatorname{argsh} u$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} u' \cdot dx$
٣١	$y = ch^{-1} x = \operatorname{argch} x$	$dy = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

٣٢	$y = ch^{-1}u = \operatorname{argch}u$	$dy = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} u' \cdot dx$
٣٣	$y = th^{-1}x = \operatorname{argth}x$	$dy = \frac{1}{1-x^2} dx$
٣٤	$y = th^{-1}u = \operatorname{argth}u$	$dy = \frac{1}{1-u^2} u' \cdot dx$
٣٥	$y = cth^{-1}x = \operatorname{argcth}x$	$dy = \frac{-1}{x^2-1} dx$
٣٦	$y = cth^{-1}u = \operatorname{argcth}u$	$dy = \frac{-1}{u^2-1} u' \cdot dx$
٣٧	$y = \operatorname{sech}^{-1}x$	$dy = \frac{1}{ x \sqrt{x^2+1}} dx$
٣٨	$y = \operatorname{sech}^{-1}u$	$dy = \frac{1}{ u \sqrt{u^2+1}} u' \cdot dx$
٣٩	$y = \operatorname{cosech}^{-1}x$	$dy = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2+1}} dx$
٤٠	$y = \operatorname{cosech}^{-1}u$	$dy = \frac{1}{ u \sqrt{u^2+1}} u' \cdot dx$
٤١	$y = \ln u$	$dy = \frac{u'}{u} dx$
42	$y = e^x$	$y' = e^x \cdot dx$
43	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u' \cdot dx$
44	$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u' \cdot dx$
45	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \cdot dx$

تمارين محلولة على المشتقات

أولاً- احسب المشتق الأولى للتتابع الآتي:

$$1) y = 2^{\frac{1}{\cos x}} ; \cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k = 0, \pm 1, \dots$$

$$y' = 2^{\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = 2^{\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$2) y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} ; a > 0, x > 0$$

$$y' = x^{x^a} \left(a x^{a-1} \cdot \ln x + x^a \cdot \frac{1}{x} \right) + x^{a^x} \left(a^x \cdot \ln a \cdot \ln x + a^x \cdot \frac{1}{x} \right) +$$

$$+ a^{x^x} \left[x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \ln a + x^x \frac{0}{\ln a} \right]$$



$$y' = x^{x^a} (a x^{a-1} \ln x + x^{a-1}) + x^{a^x} \cdot a^x \cdot (\ln a \cdot \ln x + \frac{1}{x}) +$$

$$+ a^{x^x} \cdot x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot \ln a$$

$$y' = x^{x^a} \cdot x^{a-1} \cdot (a \ln x + 1) + x^{a^x} \cdot a^x \cdot (\ln a \cdot \ln x + \frac{1}{x}) + a^{x^x} \cdot x^x (\ln x + 1) \cdot \ln a$$

$$3) y = \frac{a^x \cdot e^x}{1 + \ln a} = \frac{1}{1 + \ln a} a^x \cdot e^x ; a > 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y' = \frac{1}{1 + \ln a} (a^x \cdot \ln a \cdot e^x + a^x \cdot e^x) = \frac{a^x \cdot e^x (1 + \ln a)}{1 + \ln a} = a^x \cdot e^x$$

$$4) y = \frac{a^x \cdot b^x}{\ln(a b)} = \frac{1}{\ln a + \ln b} \cdot a^x \cdot b^x ; a, b > 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y' = \frac{1}{\ln a + \ln b} (a^x \cdot \ln a \cdot b^x + a^x \cdot b^x \cdot \ln b) =$$

$$= \frac{a^x \cdot b^x \cdot (\ln a + \ln b)}{\ln a + \ln b} = a^x \cdot b^x$$

$$5) y = (\cos x + 7x^2)^{\cos x}$$

$$\ln |y| = \cos x \cdot \ln |\cos x + 7x^2| \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln |\cos x + 7x^2| + \cos x \cdot \frac{-\sin x + 14x}{\cos x + 7x^2}$$

$$6) y = x^2 e^x$$

$$y' = x^2 e^x + 2x e^x = x e^x (x + 2)$$

$$7) y = x^3 \arctan x$$

$$y' = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \arctan x$$

$$8) y = \frac{\arcsin x}{x}$$

$$y' = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$9) y = x \sqrt{x} (3 \ln x - 2) \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} (3 \ln |x| - 2) \Rightarrow$$

$$y' = x^{\frac{3}{2}} \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} (3 \ln |x| - 2) = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln |x|$$

$$10) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} - \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$11) \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$$

$$12) \quad y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2 (1+x^2)}} \Rightarrow y' = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2| \cdot (1+x^2)}$$

$$13) \quad y = \arccos(\tan x) + \sin(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{(\tan x)'}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} + \cos(\sin 6x) (\sin 6x)' \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}}} + 6 \cos 6x \cdot \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} + 6 \cos 6x \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{\cos x} + 6 \cos 6x \cdot \cos(\sin 6x).$$

$$14) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln |y| = \ln \sqrt[3]{\frac{|x|^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln |x| + \frac{1}{3} \ln(x^2+1) - \frac{1}{15} \ln |5-x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أن $\left(\ln |u|\right)' = \frac{u'}{u}$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

$$: \text{فإن } z' = (\ln |y|)' = \frac{y'}{y}$$

وبما أن :

$$y' = y z' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{5\sqrt{5-x}}} \cdot \left[\frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)} \right]$$

$$15) f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x-1}} = (x + \sqrt{x-1})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x + \sqrt{x-1})^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right)$$

$$16) y = (\arctan x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln |y| = \sqrt{x} \cdot \ln |\arctan x|$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln |\arctan x| + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\arctan x} \Rightarrow \text{وبالاشتقاق نجد أن :}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln |\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2) \cdot \arctan x} \Rightarrow$$

$$y' = (\arctan x)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln |\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2) \cdot \arctan x} \right)$$

$$17) y = x^{\ln |\ln x|} \Rightarrow \ln y = \ln |\ln x| \cdot \ln x \Rightarrow$$

$$u = \ln |x| \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

نفرض أن :

$$\ln |y| = \ln |u| \cdot u \Rightarrow \frac{y'}{y} = u' \cdot \ln |u| + u \cdot \frac{u'}{u}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \ln |\ln x| + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = x^{\ln |\ln x|} \left[\frac{1}{x} \ln |\ln x| + \frac{1}{x} \right]$$

$$18) y = \cos(\operatorname{ch} x) ; x \in (-\infty, \infty)$$

$$y' = -\sin(\operatorname{ch} x) \cdot \operatorname{sh} x$$

$$19) y = \ln \left| \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right|$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} ; 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} : \text{طريقة أولى: نعلم أن :}$$

$$y = \ln |\tan x| \Rightarrow$$

نعوض ونختصر فنحصل على :

$$y' = \frac{\left(\tan \frac{x}{2} \right)'}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$21) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})'}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{1 + (\sqrt{x + \sqrt{x}})'}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \Rightarrow \\
 y' &= \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{1 + \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \Rightarrow \\
 y' &= \frac{1 + \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \Rightarrow \\
 y' &= \frac{4\sqrt{x} \sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}
 \end{aligned}$$

$$22) y = \arctan \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$$

$$23) y = \arcsin\left(\frac{3x}{4}\right)$$

$$y' = \frac{\left(\frac{3x}{4}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{9x^2}{16}}} = \frac{3}{\sqrt{16 - 9x^2}}$$

$$24) y = \arccos(e^{3x})$$

$$y' = \frac{-(e^{3x})'}{\sqrt{1 - (e^{3x})^2}} = \frac{-e^{3x}}{\sqrt{1 - (e^{3x})^2}}$$

$$25) y = \operatorname{arcsec}(5x)$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(5x)'}{|5x| \sqrt{(5x)^2 - 1}} = \frac{5}{|5x| \sqrt{25x^2 - 1}} = \\
 &= \frac{5}{5|x| \sqrt{25x^2 - 1}} = \frac{1}{|x| \sqrt{25x^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

$$26) y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x} = (1 + \cos^2 x)^{\frac{1}{4}}$$



$$y' = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 x)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{2} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\sin 2x}{4 \sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$$

$$27) y = 2 \sin^3 \sqrt{\frac{3}{x}}$$

$$y' = 2 \cdot 3 \cdot \sin^2 \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \cos \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$y' = -3\sqrt{3} \cdot \frac{\sin^2 \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \cos \sqrt{\frac{3}{x}}}{x \sqrt{x}}$$

$$28) y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cot \frac{2}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2 + 2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$29) y = \ln \frac{1 - \ln |x|}{1 + \ln |x|}$$

$$y' = \frac{1 + \ln |x|}{1 - \ln |x|} \cdot \frac{-\frac{1}{x} (1 + \ln |x|) - (1 - \ln |x|) \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln |x|)^2} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{x} \frac{1}{1 - \ln x} \frac{1 + \ln x + 1 - \ln x}{1 + \ln x} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2}{x (1 - \ln^2 |x|)}$$

$$30) y = \ln \left| \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right|$$

$$y' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x \sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2x \sqrt{x-1} \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$31) y = \arccos(th x) + sh(\sin 6x)$$

$$y' = - \frac{(th x)'}{\sqrt{1 - th^2 x}} + ch(\sin 6x) (\sin 6x)' =$$

$$= - \frac{\frac{1}{ch^2 x}}{\sqrt{\frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x}}} + 6 \cos 6x \cdot ch(\sin 6x) =$$

$$= - \frac{1}{ch x} + 6 \cos 6x \cdot ch(\sin 6x)$$

$$32) y = \sqrt[3]{\frac{x^3 (x^2 + 1)}{\sqrt[5]{5 - x}}}$$

$$z = \ln |y| = \ln \sqrt[3]{\frac{|x|^3 (x^2 + 1)}{\sqrt[5]{5 - x}}} \Rightarrow$$

$$z = \ln \frac{\sqrt[3]{|x|^3 (x^2 + 1)}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{5 - x}}}$$

$$z = \ln |x| + \frac{1}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{15} \ln |5 - x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أن $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2 + 1)} + \frac{1}{15(5 - x)} =$$

$$= \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2 + 1)(5 - x)}$$

$$z' = (\ln |y|)' = \frac{y'}{y} \quad \text{لكن}$$

ومنه فإن :

$$y' = y \cdot z' = 3 \sqrt{\frac{x^3 (x^2 + 1)}{5 \sqrt{5 - x}}} \cdot \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2 + 1)(5 - x)}$$

$$33) y = 4 \sqrt{3 \sqrt{x^2} - \sqrt{x}} = \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} ; \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{4} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{4}}} \cdot \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4 \sqrt{\left(3 \sqrt{x^2} - \sqrt{x} \right)^3}} \cdot \left(\frac{2}{3 \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2 \sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

$$34) y = 5x + \tan^3 x ; \quad \cos x \neq 0 ; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$y' = 5 + 3 \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5 \cos^4 x + 3 \sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$35) y = (2 - x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x ; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{aligned} y' &= -2x \cos x + (2 - x^2)(-\sin x) + 2 \sin x + 2x \cdot \cos x = \\ &= -2x \cos x - 2 \sin x + x^2 \sin x + 2 \sin x + 2x \cdot \cos x = x^2 \sin x \end{aligned}$$

$$36) y = \cot \sqrt[5]{x^5 + 1} ; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{aligned} y' &= - \frac{1}{\sin^2 \sqrt[5]{x^5 + 1}} \cdot \frac{1}{5} (x^5 + 1)^{-\frac{4}{5}} \cdot 5x^4 = \\ &= - \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5 + 1)^4} \cdot \sin^2 \sqrt[5]{x^5 + 1}} \end{aligned}$$